Pola *State Matrix* Pada *State Equations* Representasi Rangkaian Tangga RL, RC, LC, dan RLC Seragam

Ari Puji Prasetiyo[a,*]
[a]Jurusan Teknik Elektro, STT Ronggolawe Cepu
[*]Email: prasetiyo@sttrcepu.ac.id

Abstrak

Sebagai suatu sistem linier rangkaian tangga RL, RC, LC, dan RLC dengan sumber tegangan dapat direpresentasikan ke dalam bentuk *state equations* berupa persamaan matriks-vektor $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$. Dengan pemilihan *state variables* tertentu, *state matrix* **A** yang terbentuk dalam proses pemodelan memiliki pola unik dan menarik. Pola ini dapat digunakan sebagai rujukan dalam mengkonstruksi *state equations* untuk rangkaian tangga n tingkat dengan sumber yang sama. Selain itu pola yang didapatkan juga memudahkan perhitungan nilai eigen *state matrix* **A**. Selanjutnya nilai eigen tersebut akan menentukan kestabilan dari sistem dinamis $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Berdasarkan teori matriks dan indikasi perhitungan numeris rangkaian tangga LC menghasilkan sistem dinamis yang stabil sedangkan rangkaian tangga RL, RC, dan RLC menghasilkan sistem dinamis dengan kestabilan asimptotik.

Keywords: *state equations, state matrix, nilai eigen, rangkaian tangga*

1. Pendahuluan

Resistor, induktor, dan kapasitor merupakan tiga dari empat komponen elektronik fundamental dua terminal. Ketiga komponen elektronik ini didefinisikan berdasarkan hubungan antara dua dari empat variabel fundamental dari rangkaian listrik yaitu arus i, tegangan v, muatan q, dan keterkaitan fluks (*flux-linkage*) φ. Terdapat enam kombinasi yang mungkin dari empat variabel ini dan lima dari enam kombinasi tersebut merupakan hubungan antar variabel yang telah diketahui secara luas (Chua, 1969). Dua dari lima hubungan tersebut adalah

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} t(\tau)\, d\tau \tag{1}$$

dan

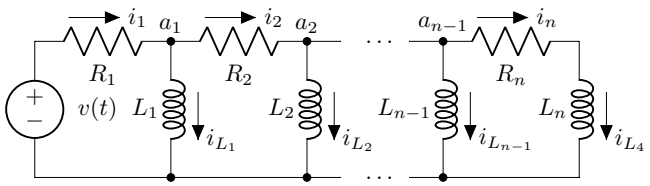
$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Tiga hubungan berikutnya secara berurutan diberikan oleh definisi aksiomatis dari tiga komponen elektronik fundamental yaitu resistor (didefinisikan atas hubungan arus dan tegangan), induktor (didefinisikan atas hubungan keterkaitan fluks dan arus), serta kapasitor (didefinisikan atas hubungan muatan dan arus). Satu hubungan yang tersisa yaitu antara keterkaitan fluks dan muatan mendefinisikan suatu komponen fundamental teoretis yang disebut dengan memristor (Chua, 1971).

Rangkaian RL adalah rangkaian listrik yang tersusun atas resistor, induktor, dan suatu sumber arus atau tegangan. Satu resistor, satu induktor, dan satu sumber akan membentuk rangkaian RL yang paling sederhana. Sejalan dengan hal ini didefinisikan rangkaian RC untuk komponen resistor-kapasitor dan rangkaian LC untuk komponen induktor-kapasitor serta rangkaian RLC untuk komponen resistor-induktor-kapasitor.

Rangkaian RL, RC, LC, dan RLC memiliki aplikasi yang luas meski dalam bentuknya yang paling sederhana. Rangkaian RL, RC, LC, dan RLC tunggal (hanya terdiri atas satu resistor, kapasitor, atau induktor) dapat berfungsi sebagai filter pasif (Horowitz and Hill, 2015). Rangkaian RLC juga merupakan salah satu contoh sistem fisik yang sering digunakan untuk merepresentasikan sistem orde dua, misalnya pada Ludwig et all., 2016. Dalam salah satu penelitian yang belum lama ditunjukkan metode baru untuk mengkonstruksi rangkaian RLC sembarang yang dapat dimanfaatkan sebagai filter *dual-band* (Khalaj-Amirhosseini et all., 2011).

Rangkaian tangga Rl, RC, LC, atau RLC adalah rangkaian RL, RC, LC, atau RLC di mana komponen-komponen pasif muncul secara berulang. Sumber yang digunakan dalam rangkaian adalah sumber tegangan $v(t)$. Sebagai contoh rangkaian tangga RL diilustrasikan pada Gambar (1) berikut.



Gambar 1: Rangkaian RL n tingkat

Pada artikel ini dibahas rangkaian tangga RL, RC, LC, dan RLC seragam yaitu ketika semua komponen sejenis memiliki nilai yang sama. Sebagai suatu sistem, rangkaian tangga ini yang dapat dinyatakan dalam bentuk *state equations*. Karena semua komponen yang terlibat diasumsikan linier maka *state equations* yang terbentuk dapat dinyatakan sebagai persamaan matriks-vektor. Selanjutnya akan diamati dan dianalisis pola dari *state matrix* yang terbentuk serta kaitannya dengan perilaku sistem yang diwakilinya.

2. Kerangka Teori

Teori dasar tentang analisis rangkaian dapat ditemukan misalnya pada Chua et al. (1987) atau Hayt et al. (2012). Terdapat tiga persamaan fundamental yang digunakan untuk keperluan analisis rangkaian tangga RL, RC, LC, dan RLC. Yang pertama adalah persamaan arus-tegangan pada resistor

$$v_R(t) = Ri_R(t) \tag{3}$$

yang merupakan bentuk matematis dari Hukum Ohm. Persamaan ini menyatakan bahwa besarnya tegangan (volt) pada resistor (beda potensial antara dua terminal) dengan hambatan R ohm merupakan hasil perkalian dari arus yang mengalir (ampere) pada resistor tersebut dengan R. Persamaan kedua adalah

$$L\frac{di_L}{dt} = v_L(t) \tag{4}$$

yang memberikan hubungan arus-tegangan pada induktor. Tegangan induktor proporsional terhadap turunan arus yang mengalir. Proporsi ini bergantung pada besarnya induktansi L (henri). Terakhir adalah persamaan tegangan-arus pada kapasitor, yaitu

$$C\frac{v_C}{dt} = i_C(t). \tag{5}$$

Pada komponen penyimpan muatan ini arus yang mengalir proporsional terhadap beda potensial antar terminal. Kapasitansi C (farad) menentukan besarnya proporsi ini.

Selain ketiga persamaan di atas, alat bantu analisis rangkaian yang tidak kalah pentingnya adalah Hukum Kirchhoff untuk rangkaian listrik. Hukum ini valid karena analisis rangkaian yang akan dilakukan menggunakan pendekatan *lumped elements* alih-alih dari pendekatan *distributed elements*. Hukum Arus Kirchhoff menyatakan bahwa penjumlahan arus di setiap *node* pada rangkaian selalu bernilai nol sedangkan Hukum Tegangan Kirchhoff memastikan bahwa jumlah tegangan dari masing-masing komponen pada sembarang *loop* juga bernilai nol.

Teori tentang sistem kendali (terutama sistem linier) dapat dilihat misalnya Ogata (2010) atau Nise (2015). Terdapat dua kategori besar dalam melakukan pemodelan suatu sistem (kendali) yaitu metode klasik dan metode modern. Metode klasik, menggunakan alat berupa transformasi Laplace, merepresentasikan suatu sistem dengan suatu fungsi yang dikenal dengan sebutan fungsi transfer. Dalam metode modern, sistem dinyatakan menggunakan representasi *state space*.

Representasi *state space* terdiri atas *state equations* dan *output equations*. Apabila sistem yang dianalisis berupa sistem linier maka *state equations* dan *output equations* dapat dituliskan dalam bentuk persamaan matriks-vektor

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \tag{6}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u. \tag{7}$$

Langkah pertama dalam memodelkan sistem ke dalam bentuk representasi *state space* adalah memilih variabel, yang selanjutnya akan disebut *state variables*, untuk membentuk *state vector* $\mathbf{x}$. State variables dipilih sebanyak n dengan n merupakan orde dari sistem yang dianalisis. *State variables* tersebut harus bebas linier karena jika tidak maka akan terdapat variabel yang dapat dieliminasi sehingga jumlah variabel akan kurang dari orde sistem. Sebagai contoh dalam rangkaian listrik variabel tegangan resistor dan arus resistor tidak dapat dipilih secara bersamaan karena berdasarkan Hukum Ohm keduanya merupakan variabel yang "sama."

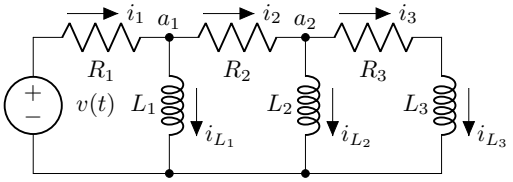
Ide dasar dari penyusunan *state equations* (6) adalah menyatakan turunan tiap *state variable* sebagai kombinasi linier dari sebagian atau seluruh *state variables* serta (dimungkinkan) dari fungsi masukan u. Hal ini dilakukan dengan menggunakan bantuan sifat, hukum, atau prinsip yang berlaku pada sistem yang dimodelkan.

3. Metodologi

Topologi rangkaian tangga yang dianalisis diberikan pada ilustrasi yang terkait. Konvensi arah arus listrik yang mengalir pada tiap komponen ditunjukkan dengan tanda panah dan diberi label penamaan. Dalam melakukan analisis rangkaian digunakan asumsi bahwa komponen sejenis memiliki nilai yang sama dalam satuan internasional dan dianggap komponen ideal. *State equations* dikonstruksi pada rangkaian yang sederhana terlebih dahulu untuk memberikan gambaran langkah-langkah singkat namun lengkap. Hasil perumuman didasarkan pada analogi pada analisis rangkaian yang lebih sederhana yang telah dilakukan sebelumnya.

3.1. Rangkaian Tangga RL

Sebagai permulaan akan dilakukan analisis terhadap rangkaian tangga RL tiga tingkat seperti diilustrasikan pada Gambar 2. Berdasarkan asumsi di awal maka semua resistor memiliki nilai hambatan R dan semua induktor memiliki nilai induktansi L.



Gambar 2: Rangkaian RL tiga tingkat

Rangkaian tangga RL di atas merupakan sistem orde 3 sehingga diperlukan 3 *state variables* yang bebas linier untuk menyusun *state equations*. *State variables* yang dipilih untuk rangkaian ini adalah $x_1 = i_{L_1}$, $x_2 = i_{L_2}$, serta $x_3 = i_{L_3}$. Pemilihan *state variables* ini didasarkan pada relasi arus-tegangan pada induktor yaitu tegangan induktor bernilai proporsional terhadap turunan arus yang mengalir, i.e. $Li'_L(t) = v_L(t)$. Keberadaan turunan arus ini akan memudahkan dalam penyusunan *state equations*. Ketiga induktor secara berurutan menghasilkan

$$L\dot{x}_1 = v_{L_1}, \tag{8}$$
$$L\dot{x}_2 = v_{L_2}, \tag{9}$$
$$L\dot{x}_3 = v_{L_3}. \tag{10}$$

Hukum Arus Kirchhoff pada *node* a_1 dan *node* a_2 memberikan persamaan arus

$$i_1 = x_1 + x_2 + x_3, \tag{11}$$
$$i_2 = x_2 + x_3. \tag{12}$$

Langkah berikutnya dalam penyusunan *state equations* adalah menyatakan tegangan pada induktor, v_{L_j}, sebagai kombinasi linier dari *state variables* dan tegangan masukan $v(t)$. Hukum Tegangan Kirchhoff pada *mesh* $v(t)$-R_1-L_1, L_1-R_2-L_2, dan L_2-R_3-L_3 beserta hukum Ohm menghasilkan persamaan

$$v_{L_1} = -v_{R_1} + v(t) = -R(x_1 + x_2 + x_3) + v(t), \quad (13)$$
$$v_{L_2} = -v_{R_2} + v_{L_1} = -R(x_1 + 2x_2 + 2x_3) + v(t), \quad (14)$$
$$v_{L_3} = -v_{R_3} + v_{L_2} = -R(x_1 + 2x_2 + 3x_3) + v(t). \quad (15)$$

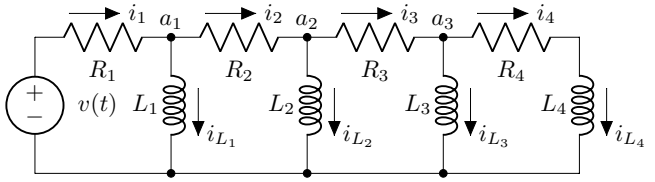
Substitusi persamaan (13), (14), dan (15) ke persamaan (8), (9), serta (10) akan memberikan *state equations* yang berbentuk sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\tfrac{R}{L}(x_1 + x_2 + x_3) + \tfrac{1}{L}v(t), \\ \dot{x}_2 &= -\tfrac{R}{L}(x_1 + 2x_2 + 2x_3) + \tfrac{1}{L}v(t), \\ \dot{x}_3 &= -\tfrac{R}{L}(x_1 + 2x_2 + 3x_3) + \tfrac{1}{L}v(t). \end{aligned} \quad (16)$$

State equations (16) selanjutnya dapat dituliskan ke dalam bentuk persamaan matriks-vektor $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ dengan *state matrix* $\mathbf{A}$ yang berbentuk

$$\mathbf{A} = -\frac{R}{L}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Setelah mendapatkan *state matrix* untuk rangkaian RL tiga tingkat selanjutnya dilakukan analisis terhadap rangkaian empat tingkat. Perhatikan ilustrasi pada Gambar 3.



Gambar 3: Rangkaian RL empat tingkat

Menggunakan langkah-langkah yang sejalan dengan kasus rangkaian RL tiga tingkat diperoleh *state equations* dengan *state matrix* berbentuk

$$\mathbf{A} = -\frac{R}{L}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Dari *state matrix* yang didapatkan pada rangkaian RL tiga dan empat tingkat, terbentuk suatu pola matriks simetris yang dapat diperumum untuk kasus rangkaian RL n tingkat.

Beberapa hal yang dapat dicatat pada kasus rangkaian n tingkat adalah terdapat masing-masing sebanyak n resistor serta induktor, sistem yang terbentuk adalah sistem orde n, terdapat sebanyak n *state variables* yaitu $i_1, i_2, \ldots, i_n$, dan *state matrix* yang dihasilkan adalah matriks persegi $n \times n$. Persamaan-persamaan yang terkait rangkaian n tingkat adalah

$$L\dot{x}_j = v_{L_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (19)$$

dengan

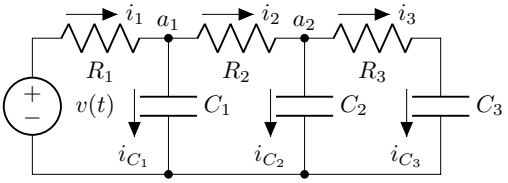
$$v_{L_1} = -R\sum_{j=1}^{n} x_j + v(t), \quad (20)$$
$$v_{L_n} = -R\sum_{j=1}^{n} jx_j + v(t), \quad (21)$$
$$v_{L_j} = -R\sum_{k=1}^{j} x_k - jR\sum_{k=j+1}^{n} x_k + v(t), \quad (22)$$

untuk $j = 2, 3, \ldots, n-1$. Dari persamaan-persamaan tersebut selanjutnya dapat disusun *state equations* yang memiliki *state matrix* dengan bentuk

$$\mathbf{A} = -\frac{R}{L}\begin{bmatrix} 1 & & & 1 & 1 & 1 \\ & 2 & & & 2 & 2 \\ & & 3 & & & 3 \\ 1 & & & . & & \\ 1 & 2 & & & . & \\ 1 & 2 & 3 & & & n \end{bmatrix}. \quad (23)$$

3.2. Rangkaian Tangga RC

Analisis akan dimulai dengan rangkaian tangga RC tiga tingkat. Perhatikan rangkaian pada Gambar 4 berikut ini. Untuk selanjutnya akan digunakan asumsi bahwa semua resistor dan kapasitor secara berurutan memiliki nilai hambatan serta kapasitansi yang sama.



Gambar 4: Rangkaian RC tiga tingkat

Sama seperti pada rangkaian tangga RL tiga *mesh*, rangkaian tangga RC tiga *mesh* juga merupakan rangkaian orde tiga (terdapat 3 komponen penyimpan energi yaitu kapasitor) sehingga dibutuhkan tiga *state variables* bebas linier dalam penyusunan *state equations*. Ketiga *state variables* yang digunakan adalah $x_1 = v_{C_1}$, $x_2 = v_{C_2}$, serta $x_3 = v_{C_3}$.

Dengan menggunakan persamaan hubungan tegangan-arus pada kapasitor, $Cv'_C(t) = i_C(t)$, dapat disusun persamaan

$$C\dot{x}_1 = i_{C_1}, \quad (24)$$
$$C\dot{x}_2 = i_{C_2}, \quad (25)$$
$$C\dot{x}_3 = i_{C_3}. \quad (26)$$

Selanjutnya hukum tegangan Kirchhoff pada ketiga *mesh*, dari kiri ke kanan, menghasilkan persamaan tegangan

$$v_{R_1} = v(t) - x_1, \quad (27)$$
$$v_{R_2} = x_1 - x_2, \quad (28)$$
$$v_{R_3} = x_2 - x_3. \quad (29)$$

Pembagian arus pada *node* a_1 dan *node* a_2 serta kesetaraan $i_{C_3} = i_3$ yang dilanjutkan dengan penggunaan hukum Ohm

dan substitusi (27), (28), serta (29) memberikan persamaan arus kapasitor sebagai kombinasi linier dari *state variables* dan masukan $v(t)$ yaitu

$$i_{C_1} = i_1 - i_2 = \tfrac{1}{R}[-2x_1 + x_2 + v(t)], \quad (30)$$
$$i_{C_2} = i_2 - i_3 = \tfrac{1}{R}[x_1 - 2x_2 + x_3], \quad (31)$$
$$i_{C_3} = i_3 = \tfrac{1}{R}[x_2 - x_3]. \quad (32)$$

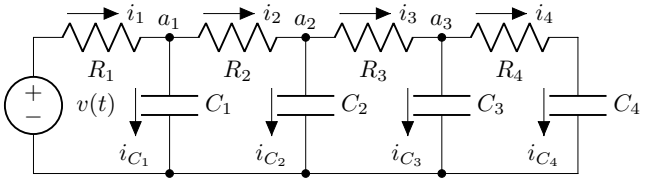
Langkah terakhir untuk mendapatkan *state equations* dari rangkaian adalah dengan melakukan substitusi (30), (31), dan (32) ke (24), (25), dan (26). Prosedur ini menghasilkan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \tfrac{1}{RC}[-2x_1 + x_2 + v(t)], \\ \dot{x}_2 &= \tfrac{1}{RC}[x_1 - 2x_2 + x_3], \\ \dot{x}_3 &= \tfrac{1}{RC}[x_2 - x_3]. \end{aligned} \quad (33)$$

Diperhatikan bahwa *state matrix* $\mathbf{A}$ pada *state equations* dalam persamaan matriks-vektor $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ berbentuk

$$\mathbf{A} = \frac{1}{RC}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Rangkaian tangga RC empat tingkat (4 *mesh*) diilustrasikan pada Gambar 5. Ini merupakan sistem orde empat yang membutuhkan empat besaran yang bebas linier sebagai *state variables*.

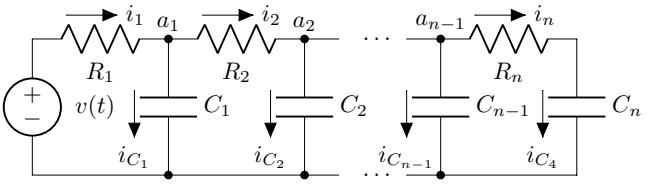


Gambar 5: Rangkaian RC empat tingkat

Kembali digunakan tegangan kapasitor sebagai *state variables* dan dijalankan langkah-langkah serupa pada kasus 3 tingkat. *State matrix* pada *state equations* dalam persamaan matriks-vektor yang didapatkan untuk kasus ini berbentuk

$$\mathbf{A} = \frac{1}{RC}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Perumuman rangkaian tangga RC adalah rangkaian n tingkat yang ditampilkan pada Gambar 6. Pada kejadian ini terdapat masing-masing sebanyak n resistor dan kapasitor dengan nilai hambatan serta kapasitansi yang sama. Keberadaan sebanyak n kapasitor mengkarakterisasi rangkaian ini sebagai sistem orde n yang membutuhkan n *state variables* serta nantinya akan membentuk *state matrix* berupa matriks persegi $n \times n$.



Gambar 6: Rangkaian RC n tingkat

Persamaan-persamaan arus-tegangan pada kapasitor yang berlaku untuk rangkaian n tingkat adalah

$$C\dot{x}_j = i_{C_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad (36)$$

sedangkan persamaan tegangan pada resistor berupa

$$v_{R_1} = v(t) - x_1, \quad (37)$$
$$v_{R_j} = x_{j-1} - x_j, \quad j = 2, 3, \ldots, n. \quad (38)$$

Arus pada kapasitor diberikan oleh persamaan

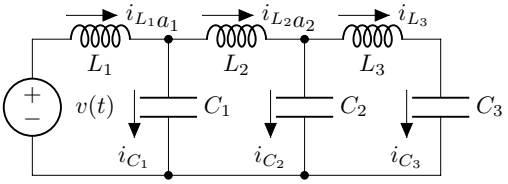
$$i_{C_1} = \tfrac{1}{R}[-2x_1 + x_2 + v(t)], \quad (39)$$
$$i_{C_j} = \tfrac{1}{R}[x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}], \quad j = 2, 3, \ldots, n-1, \quad (40)$$
$$i_{C_n} = \tfrac{1}{R}[x_{n-1} - x_n]. \quad (41)$$

Dengan menggunakan persamaan-persamaan di atas selanjutnya dapat disusun *state equations* dari rangkaian tangga RC n tingkat yang dalam bentuk persamaan matriks-vektor memiliki *state matrix* yang berbentuk

$$\mathbf{A} = \frac{1}{RC}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

3.3. Rangkaian Tangga LC

Berbeda dengan dua rangkaian sebelumnya, rangkaian tangga RC merupakan sistem dengan orde $2n$ dengan n merupakan besarnya tingkat atau banyaknya *mesh* pada rangkaian. Hal ini dikarenakan baik induktor maupun kapasitor masing-masing merupakan komponen penyimpan energi. Perhatikan ilustrasi rangkaian tangga RC tiga tingkat pada Gambar 7 berikut ini.



Gambar 7: Rangkaian LC tiga tingkat

Ini merupakan sistem orde enam yang memerlukan enam buah *state variables* untuk merepresentasikannya. Dalam hal ini dipilih arus pada induktor dan tegangan kapasitor sebagai *state variables*, yaitu $x_1 = v_{C_1}$, $x_2 = v_{C_2}$, $x_3 = v_{C_3}$, $x_4 = i_{L_1}$, $x_5 = i_{L_2}$, serta $x_6 = i_{L_3}$. Selanjutnya berlaku persamaan

$$C\dot{x}_1 = i_{C_1}, \quad (43)$$
$$C\dot{x}_2 = i_{C_2}, \quad (44)$$
$$C\dot{x}_3 = i_{C_3}, \quad (45)$$
$$L\dot{x}_4 = v_{L_1}, \quad (46)$$
$$L\dot{x}_5 = v_{L_2}, \quad (47)$$
$$L\dot{x}_6 = v_{L_3}. \quad (48)$$

Hukum Tegangan Kirchhoff dan Hukum Arus Kirchhoff akan menghasilkan persamaan

$$v_{L_1} = v(t) - x_1, \tag{49}$$
$$v_{L_2} = x_1 - x_2, \tag{50}$$
$$v_{L_3} = x_2 - x_3, \tag{51}$$
$$i_{C_1} = x_4 - x_5, \tag{52}$$
$$i_{C_2} = x_5 - x_6, \tag{53}$$
$$i_{C_3} = x_6. \tag{54}$$

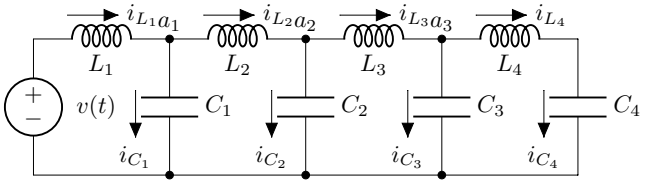
Dengan menggunakan persamaan (43) hingga persamaan (54) dapat disusun *state equations* berupa sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \tfrac{1}{C}[x_4 - x_5], \\ \dot{x}_2 &= \tfrac{1}{C}[x_5 - x_6], \\ \dot{x}_3 &= \tfrac{1}{C}x_6, \\ \dot{x}_4 &= \tfrac{1}{L}[-x_1 + v(t)], \\ \dot{x}_5 &= \tfrac{1}{L}[x_1 - x_2], \\ \dot{x}_6 &= \tfrac{1}{L}[x_2 - x_3], \end{aligned} \tag{55}$$

yang dalam persamaan matriks-vektor $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ memiliki *state matrix* yang berbentuk

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & c & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ \hline -l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l & -l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & -l & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \; c = \tfrac{1}{C}, \; l = \tfrac{1}{L}. \tag{56}$$

Penambahan satu induktor dan satu kapasitor pada rangkaian Gambar 7 akan menghasilkan rangkaian tangga RC empat tingkat seperti yang divisualisasikan pada Gambar 8. Sistem orde delapan ini membutuhkan delapan *state variables* yaitu $x_j = v_{C_j}, j = 1, 2, 3, 4$ dan $x_j = i_{L_j}, j = 5, 6, 7, 8$.

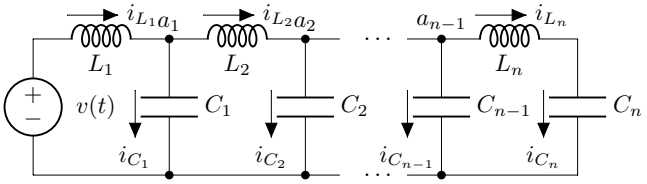


Gambar 8: Rangkaian LC empat tingkat

Delapan buah *state variables* dari sistem ini akan membentuk suatu *state equations* berupa sistem persamaan diferensial yang terdiri dari delapan persamaan diferensial simultan. Langkah-langkah konstruksinya analog dengan sistem tiga tingkat. *State matrix* yang dihasilkan adalah matriks persegi 8×8 yang berbentuk

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & c & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ \hline -l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l & -l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & -l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & -l & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{57}$$

Setelah dua kasus rangkaian tiga dan empat tingkat, berikutnya akan dilakukan generalisasi untuk rangkaian tangga LC berupa rangkaian n tingkat. Rangkaian tangga LC n tingkat ini diilustrasikan pada Gambar 9 berikut.



Gambar 9: Rangkaian LC n tingkat

State variables sistem yang diperlukan adalah $x_j = v_{C_j}$ untuk $j = 1, 2, \ldots, n$ dan $x_j = i_{L_j}$ untuk $j = n+1, n+2, \ldots, 2n$. State variables ini akan membentuk persamaan

$$C\dot{x}_j = i_{C_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{58}$$
$$L\dot{x}_j = v_{L_j}, \quad j = n+1, n+2, \ldots, 2n. \tag{59}$$

Hukum Tegangan dan Arus Kirchhoff memberikan persamaan

$$v_{L_1} = v(t) - x_1, \tag{60}$$
$$v_{L_j} = x_{j-1} - x_j, \; j = 2, 3, \ldots, n, \tag{61}$$
$$i_{C_j} = x_{n+j} - x_{n+j+1}, \; j = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{62}$$
$$i_{C_n} = x_{2n}. \tag{63}$$

State equations yang dihasilkan adalah

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= \tfrac{1}{C}[x_{n+j} - x_{n+j+1}], \; j = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \dot{x}_n &= \tfrac{1}{C}x_{2n}, \\ \dot{x}_{n+1} &= \tfrac{1}{L}[-x_1 + v(t)], \\ \dot{x}_{n+j} &= \tfrac{1}{L}[x_{j-1} - x_j], \; j = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned} \tag{64}$$

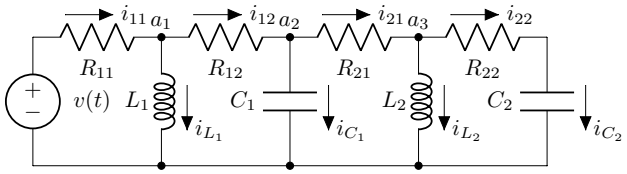
Dalam persamaan matriks-vektor, *state equations* ini memiliki *state matrix* berbentuk

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \\ \hline \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \end{array}\right], \tag{65}$$

yang mana $\mathbf{A}_1$ merupakan matriks persegi $n \times n$ dengan diagonal utama $C^{-1}, C^{-1}, \ldots, C^{-1}$ dan diagonal sekunder atas (*upper secondary diagonal*) $-C^{-1}, -C^{-1}, \ldots, -C^{-1}$ sedangkan semua entri lainnya nol, serta $\mathbf{A}_2$ juga merupakan matriks persegi $n \times n$ dengan diagonal utama $-L^{-1}, -L^{-1}, \ldots, -L^{-1}$ serta diagonal sekunder bawah (*lower secondary diagonal*) $L^{-1}, L^{-1}, \ldots, L^{-1}$ sedangkan semua entri lainnya nol. Notasi $\mathbf{0}$ menyatakan matriks $n \times n$ dengan semua entri berupa bilangan nol.

3.4. Rangkaian Tangga RLC

Sama seperti pada rangkaian LC, dalam rangkaian tangga RLC terdapat dua komponen penyimpan energi yaitu induktor dan kapasitor. Keberadaan komponen resistor tidak mempengaruhi besarnya orde dari sistem yang dihasilkan karena pada resistor Hukum Ohm memberikan relasi linier $v(t) = Ri(t)$ antara arus dan tegangan. Perhatikan rangkaian tangga RLC dua tingkat pada Gambar 10 berikut.



Gambar 10: Rangkaian RLC dua tingkat

Dari empat buah komponen penyimpan energi pada rangkaian RLC di atas dapat dengan mudah diestimasi bahwa ini merupakan sistem orde empat yang pada gilirannya akan membutuhkan empat *state variables*. Diambil besaran $x_1 = v_{C_1}$, $x_2 = v_{C_2}$, $x_3 = i_{L_1}$, serta $x_4 = i_{L_4}$ sebagai *state variable* yang akan merepresentasikan sistem ini. Menggunakan turunan dari tiap x_j diperoleh persamaan

$$C\dot{x}_1 = i_{C_1}, \tag{66}$$
$$C\dot{x}_2 = i_{C_2}, \tag{67}$$
$$L\dot{x}_3 = v_{L_1}, \tag{68}$$
$$L\dot{x}_4 = v_{L_2}, \tag{69}$$

dengan asumsi semua kapasitor bernilai C, semua induktor bernilai L, serta semua resistor bernilai R.

Hukum Arus Kirchhoff di *node* a_3, Hukum Ohm pada R_{21}, dan Hukum Tegangan Kirchhoff pada *mesh* ketiga (dari kiri) memberikan

$$i_{C_2} = \tfrac{1}{R}(x_1 - v_{L_2}) - x_4. \tag{70}$$

Hukum Tegangan Kirchhoff pada *mesh* keempat dan Hukum Ohm pada R_{22} menghasilkan

$$v_{L_2} = Ri_{C_2} + x_2 \tag{71}$$

sedangkan Hukum Arus Kirchhoff di *node* a_2, Hukum Ohm pada R_{12}, Hukum Tegangan Kirchhoff pada *mesh* kedua, Hukum Ohm pada R_{21}, dan Hukum Tegangan Kirchhoff pada *mesh* ketiga berakibat pada persamaan

$$i_{C_1} = \tfrac{1}{R}(v_{L_1} - 2x_1 + v_{L_2}). \tag{72}$$

Terakhir, Hukum Tegangan Kirchhoff pada *mesh* pertama, Hukum Ohm pada R_{11}, dan Hukum Arus Kirchhoff di *ground node* berimbas pada pembentukan persamaan

$$v_{L_1} = v(t) - R(x_3 + i_{C_1} + x_4 + i_{C_2}). \tag{73}$$

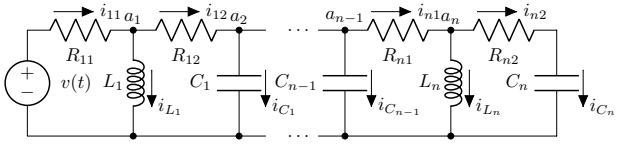
Diperhatikan bahwa dari persamaan (70) hingga persamaan (73) membentuk suatu sistem persamaan linier dengan variabel i_{C_1}, i_{C_2}, v_{L_1}, dan v_{L_2}. Solusi dari sistem persamaan linier ini adalah

$$\begin{aligned} i_{C_1} &= \tfrac{1}{2R}[-2x_1 + x_2 - Rx_3 - Rx_4 + v(t)], \\ i_{C_2} &= \tfrac{1}{2R}[x_1 - x_2 - Rx_4], \\ v_{L_1} &= \tfrac{1}{2}[x_1 - Rx_3 + v(t)], \\ v_{L_2} &= \tfrac{1}{2}[x_1 + x_2 - Rx_4]. \end{aligned} \tag{74}$$

Selanjutnya dengan substitusi (74) ke persamaan (66) hingga (69) akan diperoleh *state equations* yang dalam persamaan matriks-vektor memiliki *state matrix* berbentuk

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR} & \frac{1}{2CR} & -\frac{1}{2C} & -\frac{1}{2C} \\ \frac{1}{2CR} & -\frac{1}{2CR} & 0 & -\frac{1}{2C} \\ \frac{1}{2L} & 0 & -\frac{R}{2L} & 0 \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{2L} & 0 & -\frac{R}{2L} \end{bmatrix}. \tag{75}$$

Rangkaian tangga RLC n tingkat tersusun atas $2n$ resistor, n induktor, dan n kapasitor seperti yang diilustrasikan pada Gambar 11. Ini merupakan sistem orde $2n$ yang memerlukan sebanyak $2n$ *state variables* yaitu v_{C_j} dan i_{L_j} untuk semua kapasitor dan induktor.



Gambar 11: Rangkaian RLC n tingkat

Dengan menggunakan dari turunan *state variables* dapat disusun persamaan-persamaan

$$C\dot{x}_j = i_{C_j}, \tag{76}$$
$$L\dot{x}_{n+j} = v_{L_j}, \tag{77}$$

untuk $j = 1, 2, \ldots, n$. Sejalan dengan prosedur pada kasus rangkaian dua tingkat, dengan menggunakan Hukum Arus dan Tegangan Kirchhoff serta Hukum Ohm (di bagian yang sesuai pada rangkaian RLC n tingkat), akan diperoleh suatu sistem persamaan linier dengan variabel $i_{C_1}, \ldots, i_{C_n}, v_{L_1}, \ldots, v_{L_n}$. Solusi dari sistem persamaan linier ini selanjutnya disubstitusi ke (76) serta (77) untuk menghasilkan *state equation*. Dalam bentuk persamaan matriks-vektor, *state equations* ini memiliki *state matrix* yang berbentuk

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \hline \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{array}\right]. \tag{78}$$

Matriks $\mathbf{A}_1$ merupakan matriks tridiagonal dengan diagonal utama $-1/(CR), -1/(CR), \ldots, -1/(CR), -1/(2CR)$ serta kedua diagonal sekunder berupa $1/(2CR), \ldots, 1/(2CR)$. Matriks $\mathbf{A}_2$ merupakan matriks dengan diagonal utama dan diagonal sekunder atas berupa $-1/(2C), \ldots, -1/(RC)$ serta semua entri lainnya nol. Matriks $\mathbf{A}_3$ memiliki diagonal utama dan diagonal sekunder bawah berupa $1/(2L), \ldots, 1/(2L)$ serta semua entri lainnya nol. Matriks $\mathbf{A}_4$ adalah matriks diagonal dengan diagonal utama berupa $-R/(2L), \ldots, -R/(2L)$.

4. Hasil dan Pembahasan

Dari analisis yang telah dilakukan pada tiap tipe rangkaian tangga n tingkat diperoleh fakta bahwa *state matrix* dari *state equations* yang merepresentasikan rangkaian tangga memiliki pola menarik. Sifat-sifat matriks persegi terutama yang berkaitan dengan nilai eigen dapat dilihat misalnya pada Horn et al. (2013) atau Zhang (2017). Teori tentang kestabilan sistem dinamis diberikan oleh Glendinning (1994) atau Robinson (1999).

4.1. Pola Pada Rangkaian RL

Pola *state matrix* yang terbentuk pada rangkaian tangga RL n tingkat adalah matriks simetris. Dengan memfaktorkan matriks ini terhadap $-R/L$ akan diperoleh suatu matriks simetris dengan diagonal utama $1, 2, \ldots, n$, diagonal sekunder $1, 2, \ldots, n-1$, diagonal tersier $1, 2, \ldots, n-2$, dan seterusnya [lihat persamaan (23)].

Karakterisasi dari *state matrix* rangkaian RL n tingkat adalah bahwa $\mathbf{A}$ merupakan matriks definit negatif (nilai R dan L selalu positif). Hal ini berakibat semua nilai eigen dari matriks $\mathbf{A}$ merupakan bilangan riil negatif. Selain bernilai negatif, nilai eigen tersebut semuanya berbeda. Solusi umum bagian homogen *state equations* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ yaitu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ berbentuk

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}^{(2)}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{v}^{(n)}e^{\lambda_n t} \quad (79)$$

dengan λ_j dan $\mathbf{v}^{(j)}$ merupakan pasangan nilai dan vektor eigen dari matriks $\mathbf{A}$. Karena λ_j negatif untuk semua j maka berlaku

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \quad (80)$$

4.2. Pola Pada Rangkaian RC

Rangkaian tangga RC n tingkat membentuk *state matrix* yang memiliki pola berupa matriks tridiagonal dengan diagonal utama negatif dan diagonal sekunder positif. Jika *state matrix* ini difaktorkan terhadap $1/(RC)$ akan didapatkan matriks tridiagonal dengan diagonal utama $-2, -2, \ldots, -2, -1$ dan diagonal sekunder $1, 1, \ldots, 1$ [lihat persamaan (42)].

Sama seperti pada rangkaian RL, *state matrix* yang terbentuk pada rangkaian RC juga merupakan matriks definit negatif. Konsekuensinya adalah semua nilai eigen untuk matriks ini berupa bilangan riil negatif. Selain itu nilai eigen tersebut juga berbeda satu sama lain. Dengan demikian maka pada rangkaian RC n tingkat juga berlaku persamaan (79) dan (80).

4.3. Pola Pada Rangkaian LC

Berbeda dengan dua jenis rangkaian tangga sebelumnya, rangkaian tangga LC tidak menghasilkan *state matrix* berupa matriks simetris. *State matrix* rangkaian tangga LC berbentuk matriks blok seperti yang dinyatakan pada persamaan (65). Dalam hal ini $\mathbf{A}_1$ berupa matriks

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} c & -c & & & & \\ & c & -c & & & \\ & & c & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & -c \\ & & & & & c \end{bmatrix}, \quad c = \tfrac{1}{C} \quad (81)$$

serta $\mathbf{A}_2$ merupakan matriks

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -l & & & & & \\ l & -l & & & & \\ & l & -l & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & l & -l \end{bmatrix}, \quad l = \tfrac{1}{L}. \quad (82)$$

Berdasarkan eksperimen secara numeris dengan mengambil L dan C positif, matriks $\mathbf{A}$ memiliki nilai eigen berupa bilangan imajiner yang semuanya berbeda. Solusi umum (kompleks) dari sistem dinamis $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ berbentuk

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) = {} & c_{11}\mathbf{v}^{(11)}e^{\lambda_1 t} + c_{12}\mathbf{v}^{(12)}e^{-\lambda_1 t} \\ & + \cdots + c_{n1}\mathbf{v}^{(n1)}e^{\lambda_n t} + c_{n2}\mathbf{v}^{(n2)}e^{-\lambda_n t}\end{aligned} \quad (83)$$

dengan λ_j dan $-\lambda_j$ adalah pasangan bilangan imajiner konjugat nilai eigen $\mathbf{A}$. Berdasarkan solusi kompleks ini maka solusi riil dari bagian homogen *state equations* akan membentuk potret fase dalam ruang $\mathbb{R}^n$ di mana titik asal $\mathbf{0}$ merupakan suatu titik kesetimbangan bertipe $center$.

4.4. Pola Pada Rangkaian RLC

State matrix yang didapatkan pada rangkaian tangga RLC n tingkat merupakan matriks blok. Matriks ini diberikan pada persamaan (78). Matriks $\mathbf{A}_1$ merupakan matriks tridiagonal

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{2RC}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (84)$$

matriks $\mathbf{A}_2$ berbentuk

$$\mathbf{A}_2 = -\frac{1}{2C}\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (85)$$

matriks $\mathbf{A}_3$ berupa

$$\mathbf{A}_3 = \frac{1}{2L}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

dan matriks $\mathbf{A}_4$ adalah matriks diagonal

$$\mathbf{A}_4 = -\frac{R}{2L}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (87)$$

Dengan mengambil nilai R, L, dan C positif, eksperimen secara numeris mengindikasikan bahwa *state matrix* $\mathbf{A}$ memiliki spektrum berupa bilangan riil negatif dan bilangan kompleks dengan bagian riil negatif. Dengan spektrum seperti ini sistem dinamis $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ memiliki solusi riil berupa penjumlahan dari fungsi eksponensial negatif dan perkalian antara fungsi eksponensial negatif dengan fungsi sinusoidal. Potret fase dalam ruang $\mathbb{R}^n$ yang dihasilkan adalah perpaduan antara *spiral* dan *node* dengan tipe *sink*.

5. Kesimpulan dan Saran

Rangkaian tangga RL, RC, LC, dan RLC seragam masing-masing memiliki *state matrix* pada representasi *state space* dengan pola unik dan berbeda. Pola yang telah diketahui ini selanjutnya dapat digunakan untuk menyusun *state equations* homogen dari rangkaian tangga tersebut untuk n tingkat tertentu tanpa harus melakukan analisis rangkaian dari awal. Dengan memperhatikan pola matriks masukan $\mathbf{B}$ yang terbentuk

akan dapat disusun *state equation* nonhomogen untuk mendapatkan representasi lengkap dari rangkaian.

Bagian homogen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ dari *state equations* rangkaian tangga RL, RC, LC, dan RLC semuanya menghasilkan suatu sistem dinamis stabil. Merujuk pada (79), potret fase untuk sistem RL dan RC adalah *node* dengan tipe *sink*. Sistem ini tidak hanya stabil namun juga stabil asimptotik. Rangkaian tangga RLC juga menghasilkan sistem dinamis dengan potret fase stabil asimptotik. Nilai eigen dari **A** yang berupa bilangan riil negatif berkaitan dengan fungsi eksponensial negatif sedangkan nilai eigen kompleks dengan bagian riil negatif berkaitan dengan fungsi sinusoidal dengan amplitudo yang menurun secara eksponensial. Kedua jenis fungsi ini memiliki nilai limit nol untuk $t \to \infty$. Sistem LC stabil namun tidak asimptotik. Hal ini dikarenakan potret fase yang terbentuk adalah *center*. Jadi limit dari $\mathbf{x}(t)$ untuk $t \to \infty$ tidak ada. Kestabilan sistem dinamis yang didapatkan untuk keempat jenis rangkaian tangga ini sesuai dengan fakta bahwa tidak ada amplifikasi arus ataupun tegangan yang terjadi pada komponen pasif resistor, induktor, maupun kapasitor.

Karena nilai eigen dari *state matrix* **A** untuk rangkaian LC dan RLC diperoleh melalui eksperimen secara numeris maka perlu dilakukan pembuktian secara analitik untuk mengkonfirmasi nasil numerik tersebut. Sebagai penelitian lanjutan disarankan untuk membuktikan bahwa matriks **A** pada rangkaian LC n tingkat memiliki nilai eigen yang semuanya merupakan bilangan imajiner berbeda dan pada rangkaian RLC n tingkat dihasilkan matriks **A** yang memiliki nilai eigen berupa bilangan riil negatif serta bilangan kompleks dengan bagian riil negatif.

Daftar Pustaka

Chua, L. (1969). *Introduction to Nonlinear Network Theory*. New York, NY: McGraw-Hill.

Chua, L. (1971). Memristor—The Missing Circuit Element. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, *CT-18*(5), 507–519.

Chua, L., Charles, D., & Kuh, E. (1987). *Linear and Nonlinear Circuits*. New York, NY: McGraw-Hill.

Glendinning, P. (1994). *Stability, Instability and Chaos: An Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Hayt, W., Kemmerly, J., & Durbin, S. (2012). *Engineering Circuit Analysis* (8th ed.). New York, NY: McGraw-Hill.

Horn, R., & Johnson, C. (2013). *Matrix Analysis* (2nd ed.). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Horowitz, P., & Hill, W. (2015). *The Art of Electronics* (3rd ed.). New York, NY: Cambridge University Press.

Khalaj-Amirhosseini, M., Moghavvemi, M., & Attaran, A. (2011). Arbitrary Dual-Band RLC Circuits. *JOURNAL OF TELECOMMUNICATIONS*, *6*(2), 17–20.

Ludwig, R., Bitar, S., & Makarov, S. (2016). Second-Order RLC Circuits. In *Practical electrical engineering* (pp. 493–534). Cham, Switzerland: Springer.

Nise, N. (2015). *Control Systems Engineering* (7th ed.). Hob: Wiley.

Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering* (5th ed.). Boston, MA: Prentice Hall.

Robinson, C. (1999). *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos* (2nd ed.). Boca Raton, FL: CRC Press.

Zhang, X.-D. (2017). *Matrix Analysis and Applications*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.