Transformasi Laplace Secara Numerik Menggunakan Interpolasi Hermite dan Spline

Ari Puji Prasetiyo[a*]

[a]Jurusan Teknik Elektro, STT Ronggolawe Cepu
[*]Email: prasetiyo@sttrcepu.ac.id

Diterima : 06-06-2023 - Direview : 07-06-2023 - Diterbitkan : 30-06-2023

Intisari

Transformasi Laplace sebagai salah satu dari transformasi integral memiliki banyak aplikasi pada berbagai bidang. Transformasi ini membawa fungsi variabel riil $f(t)$ ke fungsi variabel kompleks $F(s)$. Fungsi $F(s)$ ditentukan dengan mengevaluasi integral yang diberikan oleh definisi dari transformasi Laplace. Pada kasus tertentu evaluasi terhadap integral dari $f(t)e^{-st}$ sangat sulit untuk dilakukan secara analitik. Dalam permasalahan ini dapat digunakan metode integrasi secara numerik sebagai jalan keluar. Artikel ini memperkenalkan metode sederhana transformasi Laplace secara numerik dengan memanfaatkan aturan Simpson gabungan dalam evaluasi integral dari $f(t)e^{-st}$. Integrasi numerik ini dilakukan di titik $s_1, s_2, \dots, s_n$ untuk menghasilkan barisan $F_1, F_2, \dots, F_n$ sebagai pendekatan dari $F(s_1), F(s_2), \dots, F(s_n)$. Interpolasi dengan metode Hermite dan spline diterapkan pada $F_1, F_2, \dots, F_n$ untuk mendapatkan fungsi $\hat{F}(s)$. Fungsi inilah hasil transformasi Laplace secara numerik dari $f(t)$. Akurasi dari metode numerik ini dicari dengan menghitung jarak antara $F(s)$ dan $\hat{F}(s)$ dengan menggunakan norma L^2. Dari hasil perhitungan, $\hat{F}(s)$ memberikan pendekatan yang cukup baik bagi $F(s)$ untuk beberapa fungsi pengujian. Secara umum, interpolasi Hermite menghasilkan $\hat{F}(s)$ yang lebih dekat terhadap $F(s)$ dibandingkan dengan hasil yang diperoleh menggunakan interpolasi spline.

Kata Kunci: Transformasi Laplace; Integrasi numerik; Aturan Simpson; Interpolasi Hermite; Interpolasi spline.

Abstract

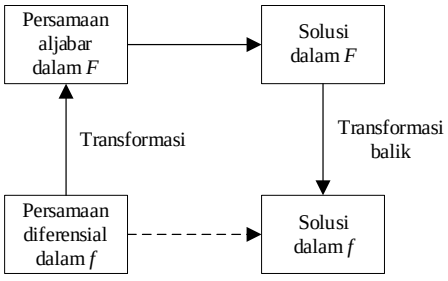
Laplace transform is a form of integral transform which has many applications in numerous fields. This transform converts a function $f(t)$ of a real variable to a function $F(s)$ of a complex variable. Function $F(s)$ can be found by evaluating the given integral of transform's definition. In some cases, evaluation of integral of $f(t)e^{-st}$ can be too complicated to perform analytically. Then numerical integration is a way out to solve the problems. This paper introduces a simple numerical method of Laplace transform employing composite Simpson rule. Numerical integrations are performed at $s_1, s_2, \dots, s_n$ to construct sequence $F_1, F_2, \dots, F_n$ as approximation of $F(s_1), F(s_2), \dots, F(s_n)$. Hermite and spline interpolation is the applied to $F_1, F_2, \dots, F_n$ in order to produce $\hat{F}(s)$ as the numerical Laplace transform of $f(t)$. The accuracy of the proposed method is revealed by calculating the distance between $F(s)$ and $\hat{F}(s)$ using L^2 norm. As the results, function $\hat{F}(s)$ can provide a decent approximation of $F(s)$ for some test functions. In general, Hermite interpolation produces $\hat{F}(s)$ which is closer to $F(s)$ compared to the result obtained by spline interpolation.

Keywords: *Laplace Transform; Numerical integration; Simpson rule; Hermite interpolation; Spline interpolation.*

1. Pendahuluan

Transformasi Laplace mungkin merupakan salah satu dari transformasi integral yang paling banyak digunakan dalam bidang matematika, teknologi, dan teknik. Transformasi ini dinamakan atas Pierre-Simon Laplace yang memperkenalkan sebagai integral yang mengubah fungsi dari satu variabel riil menjadi fungsi satu variabel kompleks (disebut juga sebagi frekuensi kompleks). Aplikasi dari operator ini tersebar di berbagai bidang sains dan teknik, misalnya, transformasi ini dapat dipergunakan untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial linier dengan orde bulat maupun orde pecahan (Atangana & Akgül, 2023).

Suatu transformasi integral, seperti transformasi Laplace, dapat diterapkan untuk melakukan konversi dari permasalahan rumit menjadi masalah yang lebih sederhana. Sebagai contoh, diberikan sebuah persamaan diferensial dari suatu fungsi $f(t)$ yang belum diketahui. Transformasi yang dilakukan terhadap persamaan diferensial ini akan menghasilkan persamaan aljabar (*algebraic equation*) dari $F(s)$, hasil transformasi dari $f(t)$, yang dapat diselesaikan dengan mudah. Selanjutnya dengan melakukan transformasi balik (*inverse transform*) terhadap $F(s)$ akan diperoleh solusi $f(t)$ dari persamaan diferensial yang bersangkutan. Secara keseluruhan, proses ini dapat digambarkan dalam bentuk diagram yang diberikan pada Gambar 1 (Shah & Naik, 2022).



Gambar 1. Solusi persamaan diferensial menggunakan transformasi Lapalce

Transformasi Laplace dari fungsi $f(t)$ secara formal diberikan oleh persamaan

$$\mathcal{L}\{\mathrm{f}(t)\} = \mathrm{F}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt, \quad \mathrm{Re}\, s > 0, \tag{1}$$

dengan e^{-st} merupakan *kernel* atau inti dari transformasi dan s adalah *transform variable* yang berupa bilangan kompleks. Hasil transformasi $F(s)$ adalah fungsi analitik dalam s pada setengah bidang kompleks dengan Re $s > a$ jika $f(t)$ memenuhi kondisi tertentu (Debnath & Bhatta, 2015).

Suatu fungsi $f(t)$ dikatakan memiliki *orde eksponensial* sebesar $a > 0$ pada interval $0 \le t < \infty$ apabila terdapat konstanta positif K sedemikian rupa sehingga untuk semua nilai $t > T$ berlaku $|f(t)| \le Ke^{at}$ dan dalam hal ini dituliskan $\mathrm{f}(t) = \mathcal{O}(e^{at})$ untuk $t \to \infty$. Dengan menggunakan definisi ini, eksistensi dari $F(s)$ dijamin oleh teorema berikut:

Teorema 1. *Jika suatu fungsi $f(t)$ kontinu atau kontinu sepotong-sepotong pada tiap interval berhingga $(0, T)$, dan memiliki orde eksponensial e^{at}, maka transformasi Laplace dari $f(t)$ ada dan terdefinisi semua bilangan komplaks s yang memenuhi* Re $s > a$ (Debnath & Bhatta, 2015).

Banyak fungsi, terutama fungsi elementer atau perpaduan dari fungsi elementer, yang telah diketahui formula eksplisit dari $F(s)$ sebagai hasil transformasi Laplace. Tabel fungsi $f(t)$ dan hasil transformasi $F(s)$ misalnya dapat diperoleh pada (Kreyszig, 2011). Di luar daftar tersebut terdapat pula fungsi yang memiliki hasil transformasi $F(s)$ namun tidak diketahui formulanya secara eksplisit.

Ketika integral (1) tidak dapat dievaluasi secara analitik maka $F(s)$ dapat ditentukan menggunakan integrasi secara numerik. Integrasi numerik ini dilakukan di titik-titik s tertentu untuk memberikan hasil pendekatan dari $F(s)$ di titik-titik tersebut. Metode transformasi Laplace secara numerik secara penuh termasuk dengan transformasi invers diberikan pada (Weideman & Fornberg, 2023).

Pada penelitian ini akan dikembangkan metode sederhana transformsi Laplace secara numerik dengan memanfaatkan interpolasi Hermite dan interpolasi spline. Metode yang akan dibahas hanya untuk transformasi (1) dan tidak mencakup transformasi Laplace balik.

2. Kerangka Teori

Empat teori utama yang diperunakan dalam penelitian ini adalah: aturan Simpson gabungan untuk melakukan integrasi fungsi secara numerik, metode interpolasi Hermit dan metode interpolasi spline untuk melakukan konstruksi fungsi kontinu terhadap sekumpulan titik yang diberikan, serta norma ruang L^2 untuk menentukan jarak antara dua fungsi.

2.1. Aturan Simpson

Teori tentang penurunan aturan Simpson (gabungan) dapat dilihat misalnya pada (Sauer, 2019). Integrasi secara numerik, atau quadrature, didasarkan pada fungsi pendekatan dari sekumpulan titik data yang diberikan. Untuk fungsi $f(x)$ yang didefinisikan pada interval $[a, b]$, suatu interpolasi polinomial dapat diterapkan pada beberapa titik dari fungsi $f(x)$ tersebut. Kemudahan dalam mengevaluasi integral dari fungsi polinomial selanjutnya menjadi pertimbangan untuk menghitung nilai pendekatan dari integral fungsi $f(x)$ yang bersangkutan. Ini merupakan ide utama dari metode Newton-Cotes dalam menyelesaikan integrasi numerik.

Salah satu implementasi dari pendekatan Newton-Cotes adalah aturan Simpson. Dari tiga buah titik pada kurva fungsi $f(x)$ dilakukan interpolasi polinomial orde dua (parabola) menggunakan formulasi Lagrange:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ & + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ & + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!} f'''(c_x) \\ = {} & P(x) + E(x) \end{aligned} \tag{2}$$

Melalui integrasi didapatkan

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} P(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_2} E(x)\,dx \tag{3}$$

dengan

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} P(x)\,dx = {} & y_0 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,dx \\ & + y_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\,dx \\ & + y_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,dx \\ = {} & y_0 \frac{h}{3} + y_1 \frac{4h}{3} + y_2 \frac{h}{3} \end{aligned} \tag{4}$$

Di sini dipergunakan $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$. Pendekatan ini memiliki galat

$$\int_{x_0}^{x_2} E(x)\,dx = -\frac{h^5}{90} f^{(\mathrm{iv})}(c) \tag{5}$$

untuk c yang berada pada interval $[x_0, x_2]$ dengan ketentuan bahwa turunan keempat dari f ada dan kontinu. Dalam hal ini aturan Simpson diberikan oleh formula

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) - \frac{h^5}{90} f^{(\mathrm{iv})}(c) \tag{6}$$

Untuk suatu interval $[a, b]$ yang cukup lebar, diperlukan beberapa interpolasi yang dilakukan pada tiap subinterval dari $[a, b]$ guna menghasilkan fungsi pendekatan yang akurat. Aturan Simpson selanjutnya dilakukan pada masing-masing subinterval tersebut kemudian hasilnya dijumlahkan. Ini akan merupakan strategi yang disebut aturan Simpson gabungan yang memanfaatkan *grid* berjarak sama

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2m-2} < x_{2m-1} < x_{2m} = b$$

Berikutnya dengan mengambil $h = x_{i+1} - x_i$ untuk setiap i, aturan Simpson diterapkan pada subinterval dengan lebar $2h$,

yaitu $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ untuk $i = 0,1,2,\cdots,m-1$. Dalam hal ini berlaku persamaan

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(c_i) \quad (7)$$

Dengan menjumlahkan semua hasil ini maka akan diperoleh formula aturan Simpson gabungan berupa

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m} + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}\right] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(\mathrm{iv})}(c) \quad (8)$$

2.2. Interpolasi Hermit

Teori tentang intepolasi Hermit dapat diperoleh misalnya pada (Burden & Faires, 2011). Diberikan $x_0, x_1, \dots, x_n$ merupakan sebanyak $n+1$ titik-titik yang berbeda yang berada pada interval $[a,b]$ dan untuk $i = 0,1,\dots,n$ diketahui bahwa m_i adalah bilangan bulat tak negatif serta diambil $m = max\, m_i$. Suatu *osculating polynomial* yang memberikan pendekatan terhadap $f \in C^m[a,b]$ adalah polinomial $P(x)$ dengan derajat terendah yang memenuhi

$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k} \quad (9)$$

untuk setiap $i = 0,1,\dots,n$ dan $k = 0,1,\dots,m_i$.

Jika $n = 0$, *osculating polynomial* yang memberikan pendekatan terhadap fungsi f merupakan polinomial Taylor ke-m_0 untuk f di titik x_0. Apabila $m_i = 0$ untuk setiap i, maka *osculating polynomial* yang bersangkutan akan berupa polinomial Lagrange ke-n yang menginterpolasi fungsi f di titik $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Apabila berlaku $m_i = 1$ untuk $i = 0,1,\dots,n$ maka akan diperoleh polinomial Hermite. Polinomial ini memiliki nilai yang sama dengan fungsi f di tiap titik $x_0, x_1, \dots, x_n$. Lebih lanjut, karena turunannya juga sama dengan turunan dari f maka kedua fungsi ini akan memiliki "bentuk" yang sama di titik $(x_i, f(x_i))$, yaitu garis singgung kedua fungsi tersebut adalah sama. Eksistensi polinomial Hermite diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2. *Jika $f \in C^1[a,b]$ dan $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ berbeda satu sama lain, maka akan terdapat dengan tunggal polinomial Hermite berderajat terendah yang bernilai sama dengan f dan f' di $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b]$. Derajat dari polinomial Hermite ini tidak akan melebihi $2n+1$ dan diberikan oleh formula*

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j} + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\widehat{H}_{\mathrm{n,j}}(x) \quad (10)$$

dan dengan menggunakan notasi $L_{n,j}(x)$ untuk menyatakan polinomial koefisien Lagrange ke-j berderajat n, berlaku

$$H_{2n+1} = \left[1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x_j)\right]L^2_{n,j}(x) \quad (11)$$

$$\widehat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)L^2_{n,j}(x) \quad (12)$$

Lebih lanjut, jika $f \in C^{2n+2}[a,b]$, maka diperoleh

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi(x)) \quad (13)$$

untuk suatu $\xi(x)$ yang berada di interval (a,b). ■

2.3. Interpolasi Spline

Penjabaran dari metode interpolasi spline dapat dirujuk misalnya pada (Gilat & Subramaniam, 2014). Pada metode splines kubik, dipergunakan polinomial orde tiga untuk menginterpolasi interval antara dua titik. Apabila diberikan sebanyak n titik yang berbeda, maka akan terdapat $n-1$ interval, dan dengan menggunakan bentuk baku, persamaan dari polinomial pada interval ke-i, antara titik x_i dan x_{i+1} diberikan oleh

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i \mathrm{x}^2 + c_i x + d_i \quad (14)$$

untuk $\mathrm{i} = 1,2,3,\dots,\mathrm{n}-1$. Secara total ada sebanyak $n-1$ persamaan, dan karena tiap persamaan memiliki empat buah koefisien, maka akan terdapat $4n-4$ koefisien yang harus ditentukan. Koefisien-koefisien ini dihitung dengan menerapkan kondisi-kondisi berikut:

1. Setiap polinomial $f_i(x)$ harus melewati titik ujung dari interval yang bersangkutan, (x_i, y_i) serta (x_{i+1}, y_{i+1}), yang berarti bahwa $f_i(x_i) = y_i$ dan $f_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$. Hal ini berakibat

   $$a_i x_i^3 + b_i x_i^2 + c_i x_i + d_i = y_i \quad (15)$$
   $$a_i x_{i+1}^3 + b_i x_{i+1}^2 + c_i x_{i+1} + d_i = y_{i+1} \quad (16)$$

   untuk $i = 1,2,\dots,n-1$. Karena terdapat $n-1$ interval, kondisi ini menghasilkan $2n-2$ persamaan.
2. Di tiap titik pertemuan dari dua interval, kemiringan (turunan pertama) dari polinomial untuk interval yang bersebelahan harus sama. Hal ini berarti bahwa kurva yang melewati titik pertemuan dua interval memiliki kemiringan yang kontinu di titik tersebut. Secara umum, turunan pertama dari polinomial ke-i adalah

   $$f'(x) = \frac{df}{dx} = 3a_i \mathrm{x}^2 + 2b_i x + c_i \quad (17)$$

   Jika terdapat sebanyak n, titik pertemuan interval yang pertama adalah $i = 2$, dan titik petemuan yang terakhir adalah $i = n-1$. Dengan menyamakan turunan pertama dari polinomial untuk dua buah interval yang bersebelahan akan diperoleh

   $$3a_{i-1}x_i^2 + 2b_{i-1}x_i + c_{i-1} = 3a_i x_i^2 + 2b_i x_i + c_i \quad (18)$$

   untuk $i = 2,3,\dots,n-1$. Karena terdapat $n-2$ titik pertemuan interval, maka syarat ini akan memberikan $n-2$ persamaan.
3. Selain turunan pertama, di tiap titik pertemuan dua interval juga berlaku turunan kedua dari polinomial interval yang bersebelahan tersebut juga harus sama. Ini berarti bahwa perubahan kemiringan kurva di titik

pertemuan dua interval harus kontinu. Turunan kedua dari polinomial ke-i adalah

$$f_1''(x) = \frac{d^2 f_i}{dx^2} = 6a_i x + 2b_i \quad (19)$$

Untuk sebanyak n titik, titik pertama pertemuan interval adalah $i = 2$, dan titik terakhir pertemuan interval adalah $i = n - 1$. Dengan menyamakan turunan kedua di tiap titik pertemuan interval diperoleh

$$6a_{i-1}x_i + 2b_{i-1} = 6a_i x_i + 2b_i \quad (20)$$

untuk $i = 2,3, \dots, n-1$. Karena terdapat $n-2$ buah titik pertemuan interval, maka kondisi ini menghasilkan $n-2$ persamaan.

Secara total, tiga kondisi di atas akan memberikan $4n-6$ persamaan dengan $4n-4$ koefisien sehingga diperlukan dua persamaan (kondisi) tambahan supaya dapat diselesaikan. Kondisi tambahan yang dapat digunakan adalah bahwa turunan kedua di titik pertama dan terakhir bernilai nol. Hal ini akan menghasilkan dua persamaan

$$6a_1 x_1 + 2b_1 = 0 \quad \text{dan} \quad 6a_{n-1}x_n + 2b_{n-1} = 0 \quad (21)$$

Jika ini adalah kondisi tambahan yang digunakan maka interpolasi yang terbentuk disebut **spline kubik natural**.

2.4. Norma L^2

Pembahasan tentang teori ruang fungsi L^p secara umum dapat diperoleh misalnya pada (Naylor & Sell, 1982) atau (Bachman & Narici, 2000). Suatu ruang L^p dapat didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi yang mana pangkat p dari nilai mutlak fungsi terintegral secara Lebesgue. Diberikan (S, Σ, μ) merupakan ruang ukuran (*measure space*) dan $1 \leq p < \infty$. Disusun $L^p(S, \mu)$ sebagai keluarga dari semua fungsi terukur $f: S \to \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$\|f\|_p = \left(\int_S |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty \quad (22)$$

Dalam hal ini $\|f\|_p$ memberikan norma dari fungsi f yang merupakan perumuman dari panjang vektor pada $\mathbb{R}^n$. Norma L^p ini selanjutnya memberikan jarak antara dua fungsi. Jika diambil $p = 2$ maka jarak antara fungsi f dan g adalah

$$\|f - g\|_2 = \sqrt{\int_S |f - g|^2 \, d\mu} \quad (23)$$

3. Metodologi

Penelitian dilakukan dengan melakukan integrasi secara numerik menggunakan aturan Simpson gabungan terhadap integral yang merupakan definisi dari transformasi Laplace, yaitu persamaan (1). Karena integrasi secara numerik tidak dapat menyertakan suatu variabel yang belum memiliki nilai, maka s digantikan oleh nilai $s_1, s_2 \dots, s_n$ dengan ketantuan $s_{i+1} = s_i + h$ untuk $i = 0,1, \dots, n-1$ dan ukuran langkah $h > 0$ serta $s_0 = 0$. Dengan kata lain, dihitung nilai pendekatan dari fungsi $F(s)$ di titik $s_1, s_2 \dots, s_n$. Integrasi juga dilakukan dengan mengambil batas kanan behingga sehingga akan diperoleh integral tertentu alih-alih dari integral tak wajar. Prosedur ini akan menghasilkan barisan $F_1, F_2, \dots, F_n$.

Konstruksi pendekatan terhadap fungsi $F(s)$ dilakukan melalui interpolasi terhadap titik (s_i, F_i) untuk $i = 1,2, \dots, n$. Fungsi yang didapatkan dari langkah ini selanjutnya akan menjadi hasil transformasi Laplace secara numerik dari fungsi $f(t)$ pada interval $[0, s_n]$. Interpolasi dilakukan menggunakan metode Hermite dan spline kubik.

Fungsi f(t) yang digunakan meliputi fungsi elementer berupa fungsi pangkat, fungsi eksponensial, fungsi sinus, dan fungsi cosinus. Fungsi-fungsi ini memiliki hasil transformasi Laplace yang telah diketahui. Fungsi lain yang akan digunakan adalah $e^{\sin t}$ dan $e^{\cos t}$. Secara teoretis kedua fungsi ini memiliki hasil transformasi Laplace $F(s)$ namun $F(s)$ tidak dapat dinyatakan dalam fungsi elementer dari variabel s.

Hasil transformasi Laplace secara numerik dari fungsi-fungsi elementer selanjutnya akan dibandingkan dengan $F(s)$ yang diperoleh dari transformasi analitik. Jika $F(s)$ dan $\hat{F}(s)$ secara berurutan adalah hasil transformasi Laplace dari fungsi $f(t)$ secara analitik dan numerik, maka akan ditentukan kemiripan dari kedua fungsi tersebut dengan cara menghitung jarak antara keduanya menggunakan norma L^2, yaitu

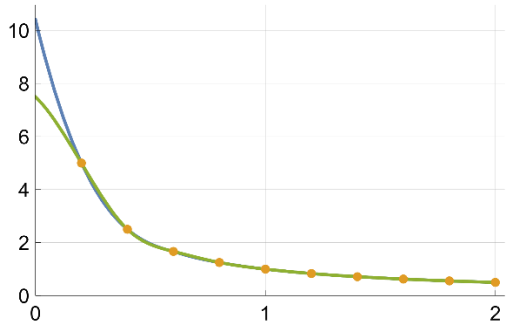
$$\left\| F(s) - \hat{F}(s) \right\|_2 = \sqrt{\int_{[0,s_n]} \left| F(s) - \hat{F}(s) \right|^2 ds} \quad (24)$$

Di sini kembali digunakan aturan Simpson gabungan untuk mengevaluasi integral secara numerik. Jarak yang bernilai kecil antara kedua fungsi menyatakan bahwa $\hat{F}(s)$ memberikan pendekatan yang baik terhadap $F(s)$, yaitu metode transformasi numerik yang digunakan cukup akurat.

4. Hasil dan Pembahasan

Interval yang diamati untuk fungsi $F(s)$ hasil transformasi Laplace adalah [0,10], yaitu $s_n = 10$, sedangkan batas kanan integrasi yang digunakan adalah $t = 40$. Berikut ini adalah hasil perhitungan yang diperoleh dengan menggunakan fungsi-fungsi elementer:

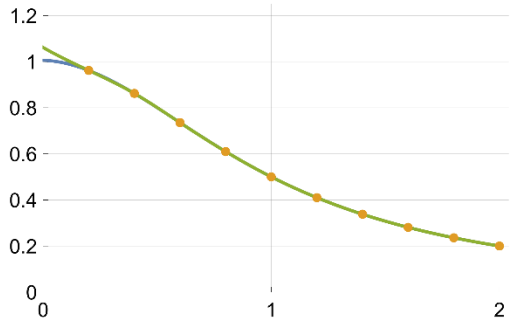
Fungsi uji f$(t) = 1$. Ini merupakan fungsi pangkat t^0 yang memiliki hasil transformasi Laplace dengan formula $F(s) = 1/s$. Fungsi resiprok ini terdefinisi untuk $s > 0$ dan memiliki limit kanan di $s = 0$ bernilai tak hingga.



Gambar 2. Hasil transformasi Laplace secara numerik dari fungsi $f(t) = 1$

Gambar 2 menampilkan hasil transformasi Laplace secara numerik dari fungsi konstan 1 menggunakan interpolasi Hermite (biru) dan spline (hijau) dengan mengambil ukuran langkah sebesar $h = 0{,}2$. Dapat dilihat bahwa kedua fungsi interpolasi tersebut bernilai berhingga karena merupakan fungsi polinomial. Karena $F(s) = 1/s$ menuju tak hingga untuk s menuju nol dari sisi kanan, maka selisih antara $F(s)$ dan kedua hasil interpolasi juga akan menuju tak hingga. Hal ini menyebabkan jarak menggunakan normal L^2, yang diberikan oleh persamaan (23), juga bernilai tak hingga. Nilai tak hingga ini, dengan alasan yang sama, diperoleh pula pada kasus $f(t) = t^k$ untuk $k > 0$.

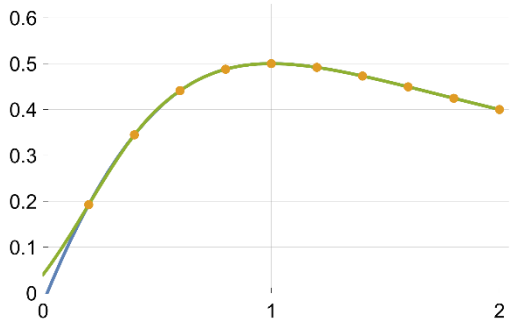
Fungsi uji $\mathrm{f}(t) = \sin t$. Hasil transformasi Laplace dari $\sin t$ adalah $F(s) = 1/(s^2 + 1)$. Gambar 3 berikut ini menampilkan hasil transformasi Laplace secara numerik dari fungsi sinus dengan menggunakan ukuran langkah $h = 0{,}2$.



Gambar 3. Hasil transformasi Laplace secara numerik dari fungsi $\mathrm{f}(t) = \sin t$ menggunakan interpolasi Hermite (biru) dan spline (hijau)

Jarak antara fungsi $F(s)$ dan hasil interpolasi metode Hermite adalah sebesar 0,0014 sedangkan menggunakan interpolasi spline memberikan nilai jarak 0,0132. Interval yang digunakan dalam perhitungan keduanya adalah [0,10] yang dibagi ke dalam 100 subinterval. Dari Gambar 3 dapat dilihat bahwa kurva interpolasi Hermite secara visual lebih mendekati kurva fungsi $F(s)$ dibandingkan dengan kurva interpolasi spline. Hal inilah yang menyebabkan jarak terhadap fungsi $F(s)$ lebih kecil untuk interpolasi Hermite dibandingkan interpolasi spline.

Fungsi uji $\mathrm{f}(t) = \cos t$. Hasil transformasi Laplace dari $\cos t$ adalah $F(s) = s/(s^2 + 1)$. Gambar 4 berikut menampilkan hasil transformasi Laplace secara numerik dari fungsi cosinus menggunakan ukuran langkah $h = 0{,}2$.



Gambar 4. Hasil transformasi Laplace secara numerik dari fungsi $\mathrm{f}(t) = \cos t$ menggunakan interpolasi Hermite (biru) dan spline (hijau)

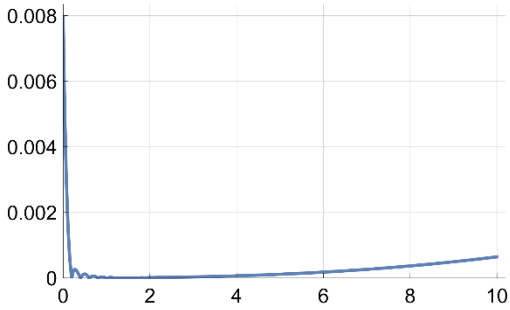
Untuk fungsi cosinus diperoleh jarak antara hasil interpolasi terhadap fungsi $F(s)$ sebesar 0,0045 dengan metode Hermite dan sebesar 0,0088 dengan metode spline. Hasil ini menunjukkan bahwa, untuk fungsi cosinus, kurva interpolasi Hermite juga lebih dekat terhadap kurva $F(s)$ dibandingkan dengan kurva interpolasi spline.

Fungsi uji $\mathrm{f}(t) = e^{-t}$. Hasil transformasi Laplace dari eksponensial negatif adalah $F(s) = 1/(s + 1)$. Hasil transformasi Laplace secara numerik dari fungsi e^{-t} dengan menggunakan ukuran langkah sebesar $h = 0{,}2$ diberikan pada Gambar 5.



Gambar 5. Hasil transformasi Laplace secara numerik dari fungsi $\mathrm{f}(t) = e^{-t}$ menggunakan interpolasi Hermite (biru) dan spline (hijau)

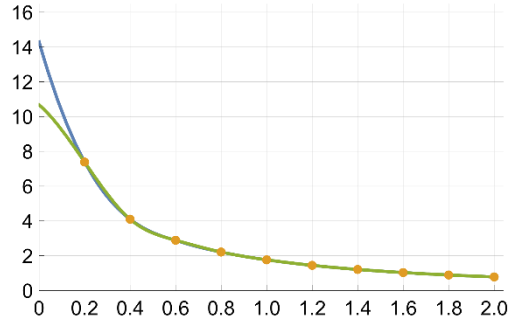
Sekali lagi interpolasi Hermite memberikan hasil lebih baik dibandingkan dengan interpolasi spline. Secara berurutan diperoleh jarak sebesar 0,0018 dan 0,0101 untuk kurva interpolasi Hermite dan interpolasi spline terhadap fungsi $F(s)$. Di titik $s = 0$, fungsi $F(s)$ bernilai $F(0) = 1$, fungsi interpolasi Hermite bernilai 0,9921 sedangkan fungsi interpolasi spline bernilai 0,9524. Dari Gambar 5 dapat dilihat bahwa galat dari hasil interpolasi terhadap fungsi $F(s)$ terakumulasi di sekitar $s = 0$. Grafik dari galat ini diberikan pada Gambar 6. Ini merupakan karakteristik yang juga muncul pada hasil menggunakan fungsi uji lain.



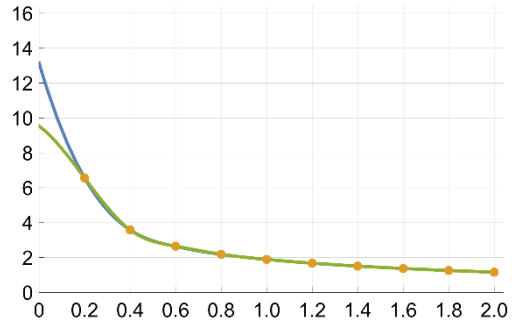
Gambar 6. Galat $\left|F(s) - \hat{F}(s)\right|$ untuk fungsi uji e^{-t} menggunakan interpolasi Hermite

Fungsi uji $\mathrm{f}(t) = e^{\sin t}$ dan $\mathrm{f}(t) = e^{\cos t}$. Kedua fungsi ini memenuhi kondisi yang menjadi syarat Teorema 1 karena masing-masing merupakan fungsi kontinu terbatas pada $\mathbb{R}$. Secara lebih spesifik berlaku $|f(t)| \leq Ke^{at}$ untuk a > 0 dan K $= 3$ pada interval $0 \leq t < \infty$. Dengan demikian berdasarkan Teorema 1 hasil transformasi $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ada dan terdefinisi untuk semua bilangan kompleks s dengan $\mathrm{Re}\, s > 0$. Namun demikian evaluasi integral (1) sangat sulit dilakukan secara analitik untuk $\mathrm{f}(t) = e^{\sin t}$ dan $\mathrm{f}(t) = e^{\cos t}$ sehingga

formula ekspisit dari $F(s)$ tidak diketahui. Sebagai alternatif, digunakan metode integrasi secara numerik untuk mengevaluasi integral (1). Integrasi secara numerik ini dilakukan di titik-titik pada interval $[0,10]$ yang sama seperti pada fungsi uji lainnya yaitu dengan menggunakan ukuran langkah 0,2. Hasil integrasi dan kurva interpolasi untuk fungsi $e^{\sin t}$ dan $e^{\cos t}$ secara berurutan diberikan pada Gambar 7 dan 8.



Gambar 7. Hasil transformasi Laplace secara numerik dari fungsi $f(t) = e^{\sin t}$ menggunakan interpolasi Hermite (biru) dan spline (hijau)



Gambar 8. Hasil transformasi Laplace secara numerik dari fungsi $f(t) = e^{\cos t}$ menggunakan interpolasi Hermite (biru) dan spline (hijau)

Karena formula eksak dari $F(s)$ tidak diketahui maka galat dari kurva interpolasi tidak dapat ditentukan. Namun demikian dengan mengamati integran $e^{\sin t - st}$ dan $e^{\cos t - st}$ dapat diketahui bahwa semakin besar nilai dari s maka akan semakin cepat kurva kedua fungsi mendekati 0. Sebaliknya, jika s mendekati 0 (dari sisi kanan) maka kurva integran akan mendekati, secara berurutan, kurva fungsi $e^{\sin t}$ dan $e^{\cos t}$. Hal ini berakibat nilai integral (1) akan menuju tak hingga ketika $s \to 0^+$, dengan kata lain $F(s) \to \infty$ seiring $s \to 0^+$. Jadi apabila jarak antara $F(s)$ dan $\hat{F}(s)$ dihitung pada interval $[0,10]$ maka dapat dipastikan diperoleh hasil tak hingga.

5. Simpulan dan Saran

Berdasarkan hasil perhitungan yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa metode transformasi Laplace numerik yang disusun dapat memberikan pendekatan yang cukup baik untuk fungsi sinus, cosinus, dan eksponensial negatif jika dilihat dari galat yang terbentuk. Fungsi pangkat menghasilkan galat tak hingga yang disebabkan oleh $F(s)$ yang tidak terbatas sedangkan fungsi $\hat{F}(s)$ selalu terbatas. Untuk mendapatkan jarak yang berhingga antara fungsi $F(s)$ dan $\hat{F}(s)$, evaluasi dari integral (23) dapat dilakukan dengan mengambil batas kiri positif, misalnya s_1. Prosedur ini akan memberikan jarak kedua fungsi pada interval $[s_1, s_n]$ alih-alih jarak pada interval $[0, s_n]$.

Dari dua metode interpolasi yang digunakan, metode Hermit lebih unggul dibandingkan dengan metode spline karena menghasilkan kurva yang lebih mendekati kurva fungsi $F(s)$ yang mengakibatkan jarak $\hat{F}(s)$ terhadap $F(s)$ bernilai lebih kecil. Secara visual, kurva interpolasi Hermite juga terlihat lebih "alami" dibandingkan dengan kurva interpolasi spline terutama untuk fungsi uji sinus.

Metode integrasi numerik lain dapat dipertimbangkan sebagai alternatif dari aturan Simpson gabungan untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat. Salah satu metode yang memungkinkan untuk dipergunakan adalah metode integrasi adaptif, dan termasuk dalam kategori ini adalah metode Simpson adaptif. Perhitungan dengan menggunakan fungsi uji lain juga dapat dilakukan untuk memberikan gambaran yang lebih luas terhadap unjuk kerja dari metode transformasi numerik ini.

Daftar Pustaka

Atangana, A., & Akgül, A. (2023). *Integral Transforms and Engineering: Theory, Methods, and Applications*. Boca Raton, FL: CRC Press.

Bachman, G., & Narici, L. (2000). *Functional Analysis*. Mineola: Dover Publications.

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis* (9th ed.). Boston, MA: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Debnath, L., & Bhatta, D. (2015). *Integral Transforms and Their Applications* (3rd ed.). Boca Raton, FL: CRC Press.

Gilat, A., & Subramaniam, V. (2014). *Numerical Methods for Engineers and Scientists: An Introduction with Applications using MATLAB* (3rd ed.). Hoboken, NJ: Wiley.

Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). Hoboken, NJ: Wiley.

Naylor, A. W., & Sell, G. R. (1982). *Linear Operator Theory in Engineering and Science*. New York, NY: Springer-Verlag.

Sauer, T. (2019). *Numerical Analysis* (3rd ed.). Hoboken, NJ: Pearson.

Shah, N. H., & Naik, M. K. (2022). *Integral Transforms and Applications*. Berlin: De Gruyter.

Weideman, J. A. C., & Fornberg, B. (2023). Fully Numerical Laplace Transform Methods. *Numerical Algorithms*, *92*, 985–1006.