Review Formula Euler: Pembuktian dan Aplikasinya

Ari Puji Prasetiyo[a*]

[a]Jurusan Teknik Elektro, STT Ronggolawe Cepu
[*]Email: prasetiyo@sttrcepu.ac.id

Diterima : 12-12-2023 - Direview : 20-12-2023 - Diterbitkan : 31-12-2023

Intisari

Formula Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ memberikan relasi fundamental antara fungsi trigonometri dan fungsi eksponensial kompleks. Formula ini, yang disebut sebagai "*the most remarkable formula in mathematics*", dapat dibuktikan dengan menggunakan berbagai pendekatan selain dari bukti "orisinal" melalui ekspansi deret Maclaurin. Dalam paper ini diberikan enam cara pembuktian formula Euler dengan metode ekspansi deret, diferensiasi, persamaan diferensial, integrasi dan identitas trigonometri, representasi bilangan kompleks, dan ketunggalan solusi persamaan diferensial untuk memberikan berbagai perspektif kaitan formula ini dengan topik dalam bidang matematika. Selain itu dibahas beberapa aplikasi dalam bidang matematika maupun bidang teknik elektro. Dalam bidang trigonometri formula Euler dapat digunakan dalam membuktikan identitas sudut ganda, $\cos 2\theta$ dan $\sin 2\theta$, identitas penjumlahan sudut, $\cos(\theta+\varphi)$ dan $\sin(\theta+\varphi)$, serta nilai dari trigonometri kompleks. Dengan penerapan formula Euler diperoleh formula praktis untuk perhitungan pangkat kompleks dari bilangan riil dan *one-liner proof* dari formula de Moivre. Impedansi kapasitor dapat dihitung menggunakan bantuan formula Euler. Dalam analisis rangkaian RC dan RLC, formula Euler dapat dimanfaatkan untuk menghasilkan persamaan dari hubungan antara tegangan masukan dan tegangan kapasitor, yaitu tegangan kapasitor merupakan hasil perkalian antara tegangan masukan dengan suatu bilangan kompleks.

Kata Kunci: formula Euler; pangkat kompleks; trigonometri kompleks; impedansi kapasitor; rangkaian RC dan RLC.

Abstract

Euler's formula $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ provides the fundamental relation between trigonometric functions and complex exponential functions. This formula, which is called "the most remarkable formula in mathematics", can be proven using various approaches other than the "original" proof via Maclaurin series expansion. In this paper, six ways of proving Euler's formula are given using the methods of series expansion, differentiation, differential equation, integration and trigonometric identities, complex number representation, and uniqueness solutions of differential equations to provide various perspectives regarding the relationship of this formula to topics in the field of mathematics. Several applications in the field of mathematics and electrical engineering are discussed. In the field of trigonometry, Euler's formula can be used to prove the identity of double angles, $\cos 2\theta$ and $\sin 2\theta$, the identity of the sum of angles, $\cos(\theta+\varphi)$ and $\sin(\theta+\varphi)$, as well as the values of complex trigonometry. By applying Euler's formula, a practical formula is obtained for calculating complex powers of real numbers and a one-liner proof of the de Moivre's formula. The impedance of a capacitor can also be calculated using the Euler formula. In the analysis of RC and RLC circuits, Euler's formula can be used to produce an equation of the relationship between input voltage and capacitor voltage, namely that the capacitor voltage is the result of multiplying the input voltage by a complex number.

Keywords: Euler's formula; complex power; complex trigonometry; capacitor impedance; RC and RLC circuit.

1. Pendahuluan

Formula Euler (*Euler's formula*), yang oleh fisikawan peraih hadiah Nobel bernama Richard Feynman disebut sebagai "*the most remarkable formula in methematics*" (Feynman, Leighton, & Sands, 1977), dinamakan atas Leonhard Euler (1707-1783) seorang matematikawan, fisikawan, dan astronomer berkebangsaan Swiss, adalah sebutan untuk sebuah formula matematis dalam analisis kompleks (*complex analysis*) yang memberikan hubungan mendasar antara fungsi trigonometri dan fungsi eksponensial kompleks. Formula ini menyatakan bahwa, untuk setiap bilangan $\theta \in \mathbb{R}$, berlaku persamaan

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (1)$$

dengan e merupakan bilangan basis logaritma natural, yaitu

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

serta i mewakili bilangan imajiner satuan (*imajinary unit*), yaitu $i = \sqrt{-1}$, sedangkan cos serta sin secara berurutan adalah fungsi trigonometri sinus dan cosinus. Kadang digunakan notasi cis θ untuk menuliskan fungsi ekponensial kompleks ini. Persamaan Euler (1) tetap berlaku bahkan untuk kasus yang lebih umum yaitu θ bernilai kompleks (Moskowitz, 2002). Formula Euler banyak dijumpai baik pada bidang fisika, kimia, teknik, dan tentu saja bidang matematika itu sendiri.

Kejadian khusus dari (1), yaitu ketika diambil nilai $\theta = \pi$, adalah persamaan $e^{i\pi} + 1 = 0$ yang dikenal dengan nama **identitas Euler** yang sering disebut sebagai salah satu contoh dari *mathematical beauty* (Gallagher, 2014). Tiga operasi aritmatik dasar: penjumlahan, perkalian, dan pangkat, muncul tepat satu kali. Identitas ini juga memberikan hubungan dari lima buah konstanta matematis fundamental (Paulos, 1992): bilangan 0 sebagai identitas operasi penjumlahan, bilangan 1 sebagai identitas operasi perkalian, bilangan π sebagai

konstanta fundamental untuk lingkaran, bilangan e yang banyak ditemui dalam analisis matematis, dan bilangan i sebagai imajiner satuan dari bilangan kompleks.

Hasil polling pada tahun 1990 yang dilakukan oleh jurnal *The Mathematical Intelligencer* menyatakan identitas Euler sebagai "*the most beautiful theorem in mathematics*" (Wells, 1990). Lebih dari satu dekade setelahnya, tepatnya pada tahun 2004, sebuah polling oleh majalah *Physics World* terhadap pembacanya menempatkan identitas Euler sebagai "*the greatest equation ever*" bersama dengan persamaan elektromagnetisme Maxwell (Crease, 2004).

Terdapat setidaknya tiga buah buku matematika populer yang secara khusus membahas tentang identitas Euler: *Dr. Euler's Fabulous Formula: Cures Many Mathematical Ills* (Nahin, 2011), *A most elegant Equation: Euler's formula and the beauty of mathematics* (Stipp, 2017), dan *Euler's Pioneering Equation: The most beautiful theorem in mathematics* (Wilson, 2018).

2. Sejarah

Formula Euler memiliki sejarah yang dimulai dari tahun 1714 ketika seorang matematikawan Inggris bernama Roger Cotes memaparkan sebuah argumen geometris yang dapat ditafsirkan sebagai persamaan (Sandifer, 2007; Stillwell, 2010)

$$i\theta = \ln(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{2}$$

yang akan menghasilkan formula Euler apabila dilakukan eksponensiasi pada kedua sisinya. Ekspresi logaritma pada (2) tidak secara umum benar untuk bilangan kompleks karena logaritma kompleks dapat memiliki tak berhingga banyak nilai dengan selisih kelipatan dari $2\pi i$.

Pada sekitar tahun 1740, Leonhard Euler mengalihkan topik penelitiannya pada fungsi eksponensial dan melalui penggunaan ekspansi deret dari ekspresi eksponensial serta ekspresi trigonometri ia menemukan formula (1) yang kelak dikenal dengan nama formula Euler (Stillwell, 2010). Penemuan ini untuk pertama kali dipublikasikan pada tahun 1748 dalam *Introductio in analysin infinitorum* (Conway & Guy, 1998).

Selain itu, Johann Bernoulli membuktikan bahwa berlaku persamaan (Bernoulli, 1702)

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix}\right) \tag{3}$$

dan karena

$$\int \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a}\ln(1+ax) + K \tag{4}$$

maka persamaan (3) memberikan informasi tentang logaritma kompleks berupa kaitan antara logaritma natural dan bilangan (kompleks) imajiner. Namun Bernoulli tidak melakukan evaluasi atas integral (4). Korespondensi antara Bernoulli dan Euler, yang juga mengetahui persamaan (3), mengungkapkan bahwa Bernoulli tidak sepenuhnya memahami logaritma kompleks. Selain dari itu, Euler juga mengusulkan bahwa logaritma kompleks dapat memiliki tak berhingga nilai. Sekitar setengah abad kemudian Caspar Wessel (1745-1818), matematikawan Denmark-Norwegia, memperkenalkan suatu pandangan tentang bilangan kompleks sebagai titik pada bidang kompleks (O'Connor & Robertson, 2000).

3. Pembuktian

Dalam *review paper* ini diberikan enam cara pembuktian atau penurunan formula Euler dengan berbagai metode yang merupakan penulisan kembali dari (Assad, 2020) dan (Penn, 2023). Tentu saja pembuktian metode Euler tidak terbatas pada apa yang diberikan di sini.

2.1. Metode Persamaan Diferensial

Salah satu cara yang dapat digunakan untuk membuktikan formula Euler adalah dengan menggunakan pendekatan persamaan diferensial, yaitu dengan mengkonstruksi suatu persamaan diferensial yang memiliki solusi berupa fungsi $e^{i\theta}$. Untuk keperluan ini didefinisikan

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \tag{4}$$

sebagai fungsi dari variabel θ. Turunan dari z terhadap θ adalah

$$\frac{dz}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta) = iz \tag{5}$$

yang merupakan suatu persamaan diferensial terpisahkan (*separable differential equation*) (Howell, 2023) dengan parameter i. Persamaan (5) dapat ditulis ulang menjadi

$$\frac{dz}{z} = id\theta \tag{6}$$

Integrasi langsung terhadap (6) akan memberikan persamaan

$$\ln z = i\theta + \ln A$$

yang memiliki bentuk eksplisit $z = Ae^{i\theta}$. Merujuk pada definisi (4) diperoleh $Ae^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Selanjutnya karena $z(0) = 1$ maka didapatkan $A = 1$. Ini membuktikan formula Euler (1).

2.2. Metode Ekspansi Deret

Metode berikut ini mungkin merupakan cara yang paling populer digunakan untuk membuktikan formula Euler. Ekspansi deret Maclaurin untuk fungsi bernilai rill atau kompleks $f(\theta)$ yang memiliki turunan ke berapa pun, diberikan oleh persamaan (Silverman, 2012)

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(\theta)\frac{\theta^n}{n!} \tag{7}$$

dengan $f^{(n)}$ menyatakan turunan ke-n dari f dan $n!$ adalah faktorial n.

Menggunakan ekspansi (7), untuk fungsi $\cos\theta$, $\sin\theta$ dan e^{θ} diperoleh

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + - \cdots$$

$$= 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \cdots \tag{8}$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + - \cdots \quad (9)$$

$$e^{\theta} = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \cdots \quad (10)$$

Berdasarkan sifat linieritas dari deret Maclaurin dan hasil (9), ekspansi dari ekspresi $i\sin\theta$ adalah

$$i\sin\theta = i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} + - \cdots$$

$$= i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \cdots \quad (11)$$

Dengan menggunakan (8) dan (11) didapatkan

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots$$

Dari (10) dapat dilihat bahwa hasil ini tidak lain merupakan ekspansi dari $e^{i\theta}$.

2.3. Metode Turunan

Satu cara yang elegan untuk membuktikan formula Euler adalah dengan memanfaatkan sifat turunan. Didefinisikan suatu fungsi

$$f(\theta) = e^{-i\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (12)$$

Perhatikan bahwa formula Euler benar jika dan hanya jika $f(\theta) = 1$ untuk semua nilai θ.

Dengan menggunakan aturan turunan dari produk fungsi (Bolton, 2014), turunan (12) adalah

$$\frac{df}{d\theta} = -ie^{-i\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) + e^{-i\theta}(i\cos\theta - \sin\theta) = 0$$

Karena turunan dari $f(\theta)$ adalah 0 maka disimpulkan bahwa $f(\theta)$ merupakan suatu fungsi konstan, yaitu $f(\theta) = K$ untuk suatu K tertentu. Selanjutnya apabila diambil $\theta = 0$ maka didapatkan $f(0) = K = 1$ sehingga berlaku

$$e^{-i\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) = 1 \quad (13)$$

Perhatikan bahwa perkalian persamaan (13) dengan $e^{i\theta}$ akan dihasilkan formula Euler (1).

2.4. Metode Integrasi dan Identitas Trigonometri

Berdasarkan definisi $-i^2 = 1$, dengan menggunakan metode dekomposisi fraksi parsial (Larson, 2016), bentuk fraksional $(i2)/(x^2+1)$ dapat diekspansi menjadi

$$\frac{i2}{x^2+1} = \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \quad (14)$$

Berikutnya, melalui integrasi terhadap x pada kedua sisi persamaan (14) dan dilanjutkan dengan penerapan aturan pengurangan logaritma, didapatkan

$$i2\arctan x + \ln K = \ln(x-i) - \ln(x+i)$$

$$= \ln\left(\frac{x-i}{x+i}\right) \quad (15)$$

Substitusi $x = \tan\frac{\theta}{2}$ ke (15) akan menghasilkan

$$i\theta + \ln K = \ln\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2} - i}{\tan\frac{\theta}{2} + i}\right) \quad (16)$$

Selanjutnya apabila digunakan identitas trogonometri dari setengah sudut tangen, yaitu

$$\tan\theta = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

maka (16) dapat ditulis ulang menjadi

$$i\theta + \ln K = \ln\left(\frac{\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} - i}{\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + i}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1-\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta + i\sin\theta}\right) \quad (17)$$

Berikutnya eksponensiasi terhadap (17) memberikan

$$Ke^{i\theta} = \frac{1-\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta + i\sin\theta} \quad (18)$$

Sisi kanan dari (18) adalah rasio dari dua buah bilangan kompleks yang dapat disederhanakan melalui perkalian dengan konjugat penyebut pada bagian pembilang dan penyebut. Langkah tersebut bersama dengan penggunaan identitas fundamental trigonometri $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (Larson, 2016) akan menghasilkan

$$Ke^{i\theta} = \frac{1-\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta + i\sin\theta} \cdot \frac{1-\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta}$$

$$= \frac{2\cos^2\theta - 2\cos\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - 2\sin\theta}{2-2\cos\theta}$$

$$= \frac{-\cos\theta\,(2-2\cos\theta) - i\sin\theta\,(2-2\cos\theta)}{2-2\cos\theta}$$

sehingga diperoleh

$$Ke^{i\theta} = -\cos\theta - i\sin\theta \quad (19)$$

Apabila diambil $\theta = 0$ akan didapatkan $K = -1$. Dengan menggunakan nilai ini, persamaan (19) akan menjadi formula Euler (1).

2.5. Metode Representasi Bilangan Kompleks

Pendekatan lain yang dapat digunakan untuk membuktikan formula Euler adalah menggunakan representasi bilangan kompleks. Diingat kembali bahwa bilangan kompleks dapat dituliskan dalam bentuk eksponensial, $z_1 = e^{i\theta}$, juga dalam

bentuk polar, $z_2 = r\cos\phi + ir\sin\phi$ (Brown & Churchill, 2013). Apabila $z_1 = z_2$ maka berlaku persamaan

$$e^{i\theta} = r\cos\phi + ir\sin\phi \qquad (20)$$

Dengan r dan ϕ masing-masing bergantung dari nilai θ, yaitu $r = r(\theta)$ dan $\phi = \phi(\theta)$. Berdasarkan aturan produk untuk turunan, proses diferensiasi dari (20) terhadap variabel θ akan menghasilkan

$$ie^{i\theta} = r'\cos\phi - r(\sin\phi)\phi' + i(r'\sin\phi + r(\cos\phi)\phi') \qquad (21)$$

Tanda aksen pada (21) menyatakan turunan terhadap θ. Karena sisi kiri (21) tidak lain merupakan bilangan kompleks $ir\cos\phi - r\sin\phi$, maka menyamakan bagian riil dan bagian imajiner akan memberikan

$$r'\cos\phi - r(\sin\phi)\phi' = -r\sin\phi \qquad (22)$$

$$r'\sin\phi + r(\cos\phi)\phi' = r\cos\phi \qquad (23)$$

yang membentuk sistem persamaan linier dalam variabel r' dan ϕ'. Perhatikan bahwa penjumlahan antara $\cos\phi$ kali (22) dengan $\sin\phi$ kali (23) yang dilanjutkan dengan penggunaan identitas fundamental trigonometri akan memberikan $r' = 0$. Hal ini berarti bahwa r adalah fungsi konstan, yaitu $r = a$ untuk suatu konstanta a tak nol tertentu. Berikutnya substitusi $r' = 0$ dan $r = a$ ke (22), atau (23), akan diperoleh $\phi' = 1$ yang berakibat $\phi = \theta + b$ untuk suatu konstanta b. Dari hasil ini, persamaan (20) dapat ditulis kembali sebagai

$$e^{i\theta} = a\cos(\theta + b) + ia\sin(\theta + b) \qquad (24)$$

Ini merupakan suatu ekuivalensi, yaitu (24) berlaku untuk semua θ. Jika diambil $\theta = 0$ maka berlaku

$$1 = a\cos b + ir\sin b$$

yang berakibat $1 = a\cos b$ dan $0 = a\sin b$. Apabila kedua persamaan ini dikuadratkan kemudian dijumlahkan maka didapatkan $a^2 = 1$, yaitu $a = \pm 1$. Untuk kasus $a = 1$ maka $\cos b = 1$ yang terpenuhi oleh $b = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Karena untuk nilai b tersebut berlaku $\cos(\theta + b) = \cos\theta$ serta $\sin(\theta + b) = \sin\theta$ maka diperoleh formula Euler. Untuk kasus $a = -1$ maka $\cos b = -1$ yang akan terpenuhi oleh $b = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Karena untuk nilai b tersebut berlaku $\cos(\theta + b) = -\cos\theta$ dan $\sin(\theta + b) = -\sin\theta$ maka akan kembali didapatkan formula Euler.

2.6. Metode Ketunggalan Solusi Persamaan Diferensial

Metode terakhir yang akan dibahas pada artikel ini adalah penggunaan sifat eksistensi dan ketunggalan solusi masalah syarat awal. Untuk persamaan diferensial biasa orde satu terdapat teorema Picard-Lindelöf (Coddington & Levinson, 1985; Murray & Miller, 2007) yang memberikan jaminan eksistensi dan ketunggalan masalah syarat awal terkait. Sifat eksistensi dan ketunggalan ini juga terdapat pada kasus persamaan diferensial biasa linier orde dua (Kreyszig, 2011). Perhatikan suatu masalah syarat awal persamaan diferensial orde dua

$$y''(\theta) = -y(\theta),\quad y(0) = 1,\ y'(0) = i \qquad (25)$$

Ini merupakan persamaan diferensial linier homogen orde dua koefisien konstan dengan solusi umum berupa fungsi $y(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta$. Berdasarkan syarat awal yang diberikan, diperoleh solusi (khusus) tunggal berupa fungsi

$$y(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

Di sisi lain, perhatikan bahwa turunan pertama dari fungsi $\hat{y}(\theta) = e^{i\theta}$ adalah $\hat{y}'(\theta) = ie^{i\theta}$ sehingga dipenuhi $\hat{y}(0) = 1$ serta $\hat{y}'(0) = i$ sedangkan turunan kedua dari $\hat{y}(\theta)$ adalah $\hat{y}''(\theta) = i^2e^{i\theta} = -e^{i\theta} = -\hat{y}(\theta)$. Dengan demikian fungsi $\hat{y}(\theta) = e^{i\theta}$ juga merupakan solusi dari masalah syarat awal (25). Karena solusi tersebut bersifat tunggal, maka haruslah $\hat{y}(\theta) = y(\theta)$ yaitu berlaku persamaan

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

yang merupakan formula Euler (1).

4. Aplikasi

Formula Euler memiliki aplikasi luas yang tersebar pada berbagai bidang, dari *natural sciences* hingga teknik. Berikut ini diberikan beberapa contoh penerapan (1) dalam bidang matematika (Hansha, 2017) dan analisis rangkaian listrik (Star, 2023).

4.1. Identitas Trigonometri

Formula Euler (1) dapat digunakan dalam proses penurunan persamaan identitas trigonometri sudut ganda (*double angle*) untuk fungsi sinus dan cosinus. Perhatikan bahwa apabila pada persamaan (1) sudut θ digantikan dengan 2θ maka akan diperoleh

$$e^{i(2\theta)} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta \qquad (26)$$

Berdasarkan aturan pangkat, sisi kiri persamaan (26) dapat dituliskan sebagai

$$e^{i(2\theta)} = (e^{i\theta})^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(2\sin\theta\cos\theta) \qquad (27)$$

Selanjutnya dengan menyamakan bagian riil serta bagian imajiner dari (26) dan (27) akan didapatkan persamaan identitas untuk $\cos 2\theta$ dan $\sin 2\theta$, yaitu

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

Identitas triginometri lain yang dapat diperoleh menggunakan formula Euler adalah sinus dan cosinus dari penjumlahan dua sudut. Jika pada persamaan (1) sudut θ disubstitusi dengan $\theta + \varphi$ maka akan didapatkan

$$e^{i(\theta+\varphi)} = \cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi) \qquad (28)$$

Diperhatikan bahwa berlaku $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}$. Penggunaan formula Euler pada sisi kanan dari persamaan (28) akan memberikan

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\varphi)} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ &\quad + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \end{aligned} \tag{29}$$

Sama seperti sebelumnya, dengan menyamakan bagian riil dan bagian imajiner dari (28) dan (29) diperoleh identitas trigonometri penjumlahan sudut

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \tag{30}$$

$$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \tag{31}$$

4.2. Formula de Moivre

Terdapat sebuah formula yang dikenal dengan sebutan formula de Moivre (disebut juga dengan teorema de Moivre dan identitas de Moivre). Nama formula ini diambil dari matematikawan Prancis, Abraham de Moivre meskipun ia tidak pernah menuliskan di dalam karya-karyanya (Lial, Hornsby, Schneider, & Daniels, 2017). Formula de Moivre menyatakan bahwa untuk sembarang bilangan $\theta \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{Z}$, berlaku persamaan

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{32}$$

Formula de Moivre (32) dapat dibuktikan misalnya dengan menggunakan induksi matematis. Cara lain yang digunakan adalah dengan menerapkan formula Euler (1). Berdasarkan aturan pangkat berlaku

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \tag{33}$$

Perhatikan bahwa penggunaan formula Euler pada sisi kiri (33) akan memberikan sisi kiri (32) sedangkan sisi kanan (33) akan menghasilkan sisi kanan (32). Hal ini membuktikan formula de Moivre.

4.3. Pangkat Kompleks

Nilai pangkat kompleks dari suatu bilangan riil, x^{a+ib}, dapat dievaluasi dengan menggunakan bantuan formula Euler. Jika $\theta\ln x$ menggantikan θ pada formula Euler, maka didapatkan persamaan

$$e^{i(\theta\ln x)} = \cos(\theta\ln x) + i\sin(\theta\ln x) \tag{34}$$

Selanjutnya karena sisi kiri dari (34) dapat dituliskan sebagai

$$e^{i(\theta\ln x)} = \left(e^{\ln x}\right)^{i\theta} = x^{i\theta}$$

maka, berdasarkan formula Euler, diperoleh

$$x^{i\theta} = \cos(\theta\ln x) + i\sin(\theta\ln x)$$

Sebagai contoh perhitungan

$$\begin{aligned} 4^{2+i3} &= 4^2 4^{i3} = 16(\cos(3\ln 4) + i\sin(3\ln 4)) \\ &\approx -8.41 - i13.61 \end{aligned}$$

4.4. Trigonometri Kompleks

Dengan menggunakan formula Euler (1), fungsi sinus dan cosinus dapat diyatakan menggunakan bentuk eksponensial kompleks. Diingat kembali bahwa cosinus adalah fungsi genap, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, dan sinus adalah fungsi ganjil, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. Untuk sudut negatif θ, formula Euler memberikan

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \tag{35}$$

Selanjutnya (1) dikurangi (35) akan menghasilkan

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta - (\cos\theta - i\sin\theta) = i2\sin\theta$$

Dengan demikian dapat dituliskan

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i2} \tag{36}$$

Berikutnya penjumlahan dari (1) dan (35) memberikan

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + (\cos\theta - i\sin\theta) = 2\cos\theta$$

sehingga berlaku

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \tag{37}$$

Hasil-hasil tersebut selanjutnya dapat dipergunakan untuk menghitung nilai fungsi sinus dan cosinus dengan argumen bilangan kompleks. Perhatikan bahwa substitusi $i\theta$ untuk menggantikan θ pada (36) dan (37) akan menghasilkan

$$\sin i\theta = \frac{e^{i^2\theta} - e^{-i^2\theta}}{i2} = -i\frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2} = i\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

$$\cos i\theta = \frac{e^{i^2\theta} + e^{-i^2\theta}}{2} = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2}$$

Fungsi $(e^{\theta} - e^{-\theta})/2$ dan $(e^{\theta} + e^{-\theta})/2$ secara berurutan memiliki nama tersendiri yaitu sinus hiperbolik, $\sinh\theta$, dan cosinus hiperbolik, $\cosh\theta$ (Stroud & Booth, 2020). Dengan demikian didapatkan

$$\sin i\theta = i\sinh\theta \tag{38}$$

$$\cos i\theta = \cosh\theta \tag{39}$$

Sebagai contoh perhitungan, berdasarkan (30), (38), dan (39) berlaku

$$\begin{aligned} \cos(2+i3) &= \cos 2\cos i3 - \sin 2\sin i3 \\ &= \cos 2\cosh 3 - i\sin 2\sinh 3 \\ &\approx -4.19 - i9.11 \end{aligned}$$

Sedangkan dari (31), (38), dan (39) diperoleh

$$\begin{aligned} \sin(2+i3) &= \sin 2\cos i3 + \cos 2\sin i3 \\ &= \sin 2\cosh 3 + i\cos 2\sinh 3 \\ &\approx 9.15 - i4.17 \end{aligned}$$

Selanjutnya dari definisi $\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$, nilai tangen kompleks dapat ditentukan dengan mudah.

4.5. Impedansi Kapasitor

Dalam bidang analisis rangkaian (*circuit analysis*) diketahui bahwa hubungan antara arus $i(t)$ dan tegangan $v(t)$ pada komponen kapasitor dengan kapasitansi C farad mengikuti persamaan (Nise, 2015)

$$C\frac{dv}{dt} = i \tag{40}$$

Jika tegangan diberikan oleh fungsi sinusoidal generik

$$v = A\cos(\omega t + \theta) \tag{41}$$

yang mana A, ω, serta θ secara berurutan menyatakan amplitudo, frekuensi, dan sudut fase, maka berdasarkan (40), diferensiasi terhadap tegangan (41) akan memberikan fungsi arus berupa

$$i = -\omega CA\sin(\omega t + \theta) \tag{42}$$

Selanjutnya perhatikan bahwa merujuk pada formula Euler, (41) merupakan bagian riil dari fungsi tegangan

$$v = Ae^{j(\omega t+\theta)} = A\cos(\omega t + \theta) + jA\sin(\omega t + \theta)$$

dengan j menyatakan bilangan imajiner satuan, $j = \sqrt{-1}$, karena simbol i telah digunakan untuk melambangkan arus. Substitusi turunan $Ae^{j(\omega t+\theta)}$ terhadap t pada persamaan (40) menghasilkan

$$\begin{aligned} i &= j\omega CAe^{j(\omega t+\theta)} = j\omega Cv \\ &= -\omega CA\sin(\omega t + \theta) + j\omega CA\cos(\omega t + \theta) \end{aligned} \tag{43}$$

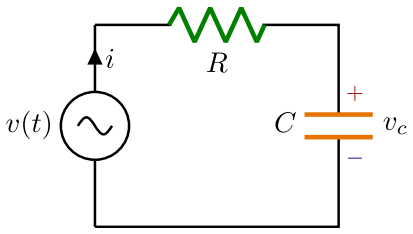
Di sini komponen riil dari arus adalah $-\omega CA\sin(\omega t + \theta)$, sama seperti diberikan oleh (42). Dalam hal ini penggunaan formula Euler telah "mentransformasi" suatu persamaan yang melibatkan turunan, persamaan (40), ke persamaan aljabar (43) yang pada gilirannya memberikan rasio tegangan dan arus berupa

$$\frac{v}{i} = \frac{1}{j\omega C} \tag{44}$$

yang dikenal sebagai **impedansi** (*impedance*) dari komponen kapasitor, yang secara kuantitatif didefinisikan sebagai rasio representasi kompleks dari tegangan sinusoidal terhadap representasi kompleks dari arus yang mengalir (Callegaro, 2012). Perhatikan bahwa rasio ampitudo tegangan v pada (41) terhadap amplitudo arus i pada (42) juga menghasilkan resiprok $1/(\omega C)$. Keberadaan bilangan imajiner satuan j pada (44) menunjukkan terdapat pergeseran fase pada arus sebesar θ radian.

4.6. Rangkaian RC

Diberikan suatu rangkaian listrik satu *loop* yang tersusun atas hubungan seri dari sumber tegangan, $v(t)$, resistor dengan hambatan R ohm, dan kapasitor dengan kapasitansi C farad (dikenal dengan sebutan rangkaian RC) seperti ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Rangkain RC

Berdasarkan hukum tegangan Kirchhoff (Glisson, 2011), hasil penjumlahan tegangan resistor dan tegangan kapasitor (dinotasikan menggunakan v_c), akan sama dengan tegangan sumber. Dengan menggunakan hukum Ohm dan persamaan (40), akan diperoleh bentuk persamaan diferensial biasa linier orde satu

$$v(t) = v_c + RC\frac{dv_c}{dt} \tag{45}$$

dalam variabel gayut berupa tegangan kapasitor, $v_c(t)$, dan variabel bebas waktu, t. Solusi dari persamaan diferensial (45) dapat ditentukan menggunakan formula (Tenenbaum & Pollard, 2012)

$$e^{\int dt/(RC)}v_c(t) = \frac{1}{RC}\int v(t)e^{\int dt/(RC)}\,dt + K$$

Namun demikian, jika tegangan masukan berupa fungsi sinusoidal maka begitu pula dengan tegangan kapasitor, yaitu solusi dari (45) akan berbentuk

$$v_c = A\cos(\omega t + \theta) \tag{46}$$

Alih-alih (46), dapat digunakan bentuk eksponensial

$$v_c = Ae^{j(\omega t+\theta)}$$

yang memiliki bagian riil yang sama dengan (46). Karena turunan v_c terhadap waktu adalah

$$\frac{dv_c}{dt} = j\omega v_c \tag{47}$$

maka persamaan diferensial biasa (45) dapat ditulis kembali menjadi persamaan aljabar (*algebraic equation*)

$$v(t) = v_c + j\omega RCv_c$$

dengan solusi untuk v_c berupa

$$v_c = \frac{1}{1 + j\omega RC}v(t) \tag{48}$$

Perhatikan bahwa faktor pengali untuk $v(t)$ hanyalah sebuah bilangan kompleks yang dapat dinyatakan dalam bentuk eksponensial menggunakan formula Euler, yaitu tegangan kapasitor v_c adalah perkalian tegangan masukan $v(t)$ dengan suatu bilangan kompleks tertentu.

Sebagai contoh perhitungan, untuk nilai $\omega = R = C = 1$ persamaan (48) akan menjadi

$$v_c = \frac{1}{1+j}v(t) = \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)v(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}v(t) \tag{49}$$

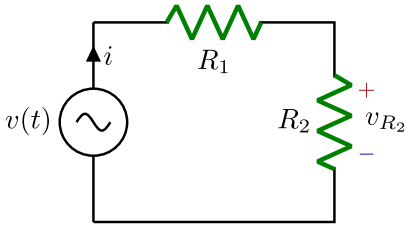
Jadi jika tegangan masukan adalah $v(t) = 4\cos(t + \pi/3)$ maka dapat digunakan bentuk eksponensial yang memiliki bagian riil yang sama, $v(t) = 4e^{j(t+\pi/3)}$, sebagai substitusi ke (49) untuk mendapatkan

$$v_c = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4} \cdot 4e^{j\left(t+\frac{\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}e^{j\left(t+\frac{\pi}{12}\right)} \qquad (50)$$

Selanjutnya menggunakan formula Euler (1), cukup diambil bagian riil dari (50) untuk mendapatkan tegangan kapasitor

$$v_c = 2\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{12}\right)$$

Perhatikan rangkaian pembagi tegangan yang diberikan pada Gambar 2. Rangkaian ini diperoleh dengan mengganti komponen kapasitor pada rangkaian RC dengan resistor lain.



Gambar 2. Rangkain Pembagi Tegangan

Tegangan pada resistor R_2, berdasarkan hukum Ohm dan hukum tegangan Kirchhoff, akan diberikan oleh persamaan (Boylestad, 2015)

$$v_{R_2} = \frac{R_2}{R_2 + R_1} v(t) \qquad (51)$$

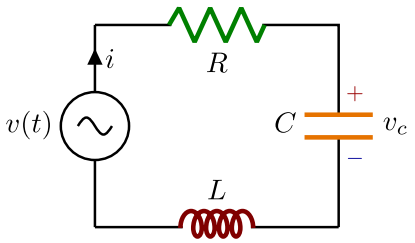
Sekarang, apabila sisi kanan dari persamaan (48) dikalikan dengan impedansi $1/(j\omega C)$ pada bagian pembilang serta penyebut, maka akan didapatkan

$$v_{R_2} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} v(t) \qquad (52)$$

Di sini dapat dilihat bahwa (52) memiliki bentuk yang mirip dengan (51), yaitu substitusi hambatan R_2 pada (51) dengan impedansi kapasitor $1/(j\omega C)$ akan menghasilkan (52). Hal ini terjadi karena sifat impedansi yang dapat dipandang sama seperti hambatan: hubungan seri dan paralel dari impedansi mengikuti aturan hubungan seri dan paralel hambatan (Nise, 2015). Perbedaannya adalah kemunculan bilangan imajiner satuan j pada impedansi yang mengindikasikan adanya pergeseran sudut fase dan perubahan amplitudo yang dapat ditentukan secara aljabar dengan menggunakan bantuan formula Euler.

4.7. Rangkaian RLC

Metode yang digunakan untuk rangkaian RC dapat diperluas untuk kasus lain yang lebih rumit. Jika ke dalam rangkaian RC ditambahkan komponen induktor maka akan didapatkan rangkaian RLC seperti ditampilkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Rangkain RLC

Hubungan antara arus dan tegangan pada induktor, v_l, dengan induktansi L farad diberikan oleh persamaan (Nise, 2015)

$$L\frac{di}{dt} = v_l$$

Berdasarkan hukum Ohm dan hukum tegangan Kirchhoff, pada rangkaian RLC berlaku hubungan

$$v(t) = v_c + RC\frac{dv_c}{dt} + L\frac{di}{dt} \qquad (53)$$

Karena arus pada induktor adalah sama dengan arus pada kapasitor, maka dengan menggunakan (40), persamaan (53) dapat dituliskan sebagai

$$v(t) = v_c + RC\frac{dv_c}{dt} + LC\frac{d}{dt}\left(\frac{dv_c}{dt}\right) \qquad (54)$$

Ini merupakan persamaan diferensial biasa orde dua linier koefisien konstan yang memodelkan rangkaian suatu RLC. Persamaan (54) dapat diselesaikan dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik serta penggunaan metode koefisien tak tentu atau metode variasi parameter. Namun demikian, apabila tegangan $v(t)$ merupakan fungsi sinusiodal (yang berakibat v_c juga fungsi sinusoidal) maka, seperti pada kasus rangkaian RC, dapat dipergunakan formula Euler (1) untuk menentukan solusi dari (54).

Untuk tegangan v_c yang diberikan oleh (46), substitusi (47) ke persamaan (54) memberikan

$$\begin{aligned} v(t) &= v_c + j\omega RCv_c + j\omega LC\frac{dv_c}{dt} \\ &= v_c + j\omega RCv_c + j^2\omega^2 LCv_c \\ &= v_c + j\omega RCv_c - \omega^2 LCv_c \\ &= (1 - \omega^2 LC + j\omega RC)v_c \end{aligned}$$

Dengan demikian berlaku

$$v_c = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} v(t) \qquad (55)$$

Sekali lagi ditunjukkan bahwa dengan penggunaan formula Euler, suatu persamaan diferensial (54) dapat ditulis ke dalam bentuk persamaan aljabar (55). Sama seperti sebelumnya, tegangan kapasitor, v_c, adalah hasil perkalian antara tegangan masukan dengan suatu bilangan kompleks tertentu.

Misalkan diberikan $\omega = R = C = L = 1$, maka persamaan (55) akan menjadi

$$v_c = \frac{1}{j} v(t) = -jv(t) = e^{-j\frac{\pi}{2}} v(t) \qquad (56)$$

Apabila diketahui bahwa $v(t) = 3\cos(t + \pi/4)$ maka dapat digunakan bentuk eksponensial $v(t) = 3e^{j(t+\pi/4)}$, dengan bagian riil yang sama, untuk substitusi ke persamaan (56) guna memperoleh

$$v_c = e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot 3e^{j\left(t+\frac{\pi}{4}\right)} = 3e^{j\left(t-\frac{\pi}{4}\right)} \qquad (57)$$

Dengan formula Euler (1) dapat diambil bagial riil dari (57) untuk memperoleh tegangan kapasitor

$$v_c = 3\cos(t - \pi/4)$$

5. Simpulan dan Saran

Formula Euler (1) dapat dibuktikan dengan berbagai cara, selain dari metode yang dipergunakan oleh Leonhard Euler yaitu ekspansi deret pangkat, mulai dari cara yang *straight forward*, seperti melalui pendekatan persamaan diferensial terpisahkan dan metode turunan, hingga cara yang lebih membutuhkan teori tambahan, seperti penggunaan integral, indentitas trogonometri, representasi bilangan kompleks, dan ketunggalan solusi persamaan diferensial. Berbagai metode pembuktian ini menunjukkan bahwa formula Euler memiliki keterkaitan dengan banyak topik dalam bidang matematika. Namun demikian, formula Euler (1) belum dapat mengalah-kan formula Euler lain dalam bidang geometri,

$$V - E + F = 2$$

yang diketahui memiliki setidaknya 21 (dua puluh satu) cara pembuktian (Eppstein, n.d.).

Penerapan formula Euler dapat memberikan pembuktian dari identitas trigonometri sudut ganda dan penjumlahan sudut secara sederhana. Identitas-identitas tersebut bahkan dapat diperoleh tanpa menggunakan persamaan trigonometri lain. Formula Euler juga memberikan cara praktis dalam perhitungan pangkat kompleks dari suatu bilangan riil dan nilai fungsi trigonometri kompleks. Selain itu, menggunakan (1), dapat menghasilkan *one-liner proof* untuk Formula de Moivre.

Dalam bidang analisis rangkaian, formula Euler (1) dapat menyederhanakan persoalan penentuan tegangan keluaran untuk masukan berupa tegangan sinusoidal pada rangkaian RC dan rangkaian RLC. Pengunaan bentuk eksponensial untuk tegangan dapat mereduksi persamaan diferensial repre-sentasi dari rangkaian menjadi persamaan aljabar yang lebih mudah untuk diselesaikan. Apabila tegangan masukan bukan berupa fungsi sinusoidal maka tentu saja formula (1) tidak dapat diterapkan.

Eksplorasi terhadap formula Euler (1) dapat terus dilaku-kan untuk mendapatkan bukti-bukti baru yang terkait dengan bidang yang berbeda dari enam pembuktian di atas. Dengan bukti-bukti baru tersebut diharapkan dapat mendorong pene-rapan yang lebih luas dari formula ini.

Daftar Pustaka

Assad, W. (2020). Proof of Euler's Formula Without Taylor Series. Retrieved December 8, 2023, from https://www.youtube.com/watch?v=4hxpA-SPiRQ

Bernoulli, J. (1702). Solution d'un problème concernant le calcul intégral, avec quelques abrégés par rapport à ce calcul. *Mémoires de l'Académie Royale Des Sciences de Paris*, 289–297.

Bolton, W. (2014). *Differentiation and Integration*. Abingdon, UK: Routledge.

Boylestad, R. L. (2015). *Introductory Circuit Analysis* (13th ed.). Essex, UK: Pearson.

Brown, J. W., & Churchill, R. V. (2013). *Complex Variables and Applications* (9th ed.). New York, NY: McGraw Hill.

Callegaro, L. (2012). *Electrical Impedance: Principles, Measurement, and Applications*. Boca Raton, FL: CRC Press.

Coddington, E. A., & Levinson, N. (1985). *Theory of Ordinary Differential Equations*. Malabar, FL: Robert E. Krieger Publishing Company.

Conway, J. H., & Guy, R. (1998). *The Book of Numbers*. New York, NY: Springer Science & Business Media.

Crease, R. P. (2004). The greatest equations ever. Retrieved December 3, 2023, from https://physicsworld.com/a/the-greatest-equations-ever/

Eppstein, D. (n.d.). Twenty-one Proofs of Euler's Formula: V - E + F = 2. Retrieved December 15, 2023, from https://ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/

Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (1977). *The Feynman lectures on physics, vol. 1*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company.

Gallagher, J. (2014). Mathematics: Why the brain sees maths as beauty. Retrieved December 3, 2023, from https://www.bbc.com/news/science-environment-26151062

Glisson, T. H. (2011). *Introduction to Circuit Analysis and Design*. Springer Netherlands.

Hansha, O. (2017). Applications of Euler's Formula: Complex Multiplication, Exponentiation, & Trigonometry. Retrieved from https://ozanerhansha.medium.com/applications-of-eulers-formula-857bf60ba32d

Howell, K. B. (2023). *Ordinary Differential Equations: An Introduction to the Fundamentals*. Boca Raton, FL: CRC Press.

Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). Hoboken, NJ: Wiley.

Larson, R. (2016). *Algebra & Trigonometry*. Boston, MA: Cengage Learning.

Lial, M., Hornsby, J., Schneider, D., & Daniels, C. (2017). *College Algebra and Trigonometry* (6th ed.). Essex, UK: Pearson Education Limited.

Moskowitz, M. (2002). *A Course In Complex Analysis In One Variable*. Singapore: World Scientific Publishing Compan.

Murray, F. J., & Miller, K. S. (2007). *Existence Theorems for Ordinary Differential Equations*. Mineola, NY: Dover Publications.

Nahin, P. (2011). *Dr. Euler's Fabulous Formula: Cures Many Mathematical Ills*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Nise, N. (2015). *Control Systems Engineering* (7th ed.). Hoboken, NJ: Wiley.

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2000). Caspar Wessel's Biography. Retrieved December 4, 2023, from https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wessel/

Paulos, J. A. (1992). *Beyond Numeracy: An Uncommon Dictionary of Mathematics*. London, UK: Penguin Books.

Penn, M. (2023). Deriving Euler's formula four ways! Retrieved December 10, 2023, from https://www.youtube.com/watch?v=fkJjsqVsaXc

Sandifer, C. E. (2007). Euler's Greatest Hits. In *How Euler Dit It*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Silverman, R. A. (2012). *Modern Calculus and Analytic Geometry*. Mineola, NY: Dover Publications.

Star, Z. (2023). Why do Electrical Engineers use imaginary numbers in circuit analysis? Retrieved December 5, 2023, from https://www.youtube.com/watch?v=FCNHN7B9iDM

Stillwell, J. (2010). *Mathematics and Its History* (3rd ed.). New York, NY: Springer.

Stipp, D. (2017). *A Most Elegant Equation: Euler's formula and the beauty of mathematics*. New York, NY: Basic Books.

Stroud, K. A., & Booth, D. J. (2020). *Engineering Mathematics* (8th ed.). London, UK: RED GLOBE PRESS.

Tenenbaum, M., & Pollard, H. (2012). *Ordinary Differential Equations*. New York, NY: Dover Publications.

Wells, D. (1990). Are these the most beautiful? *The Mathematical Intelligencer, 12*(3), 37–41.

Wilson, R. (2018). *Euler's Pioneering Equation: The most beautiful theorem in mathematics*. Oxford, UK: Oxford University Press.